Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.164

Мельникова Ирина Анатольевна

Компактные слоения морсовских форм

(01.01.04 — геометрия и топология)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор
А.С.Мищенко

Москва 1995

Оглавление

Введение

В настоящей работе изучаются слоения на гладких компактных многообразиях, определяемые замкнутой 1–формой с морсовскими особенностями. Рассматривается вопрос о компактности слоев, а также свойства слоений, все слои которых компактны.

Задача об изучении топологической структуры поверхностей уровня морсовских форм была поставлена С.П.Новиковым в работе [20], рассматривалась в обзоре [21].

Квазипериодическая структура поверхностей уровня морсовских форм изучалась в работах С.П.Новикова [21], Л.А.Алания [1], А.В.Зорича [10] и Т.К.Т.Ле [11]. Было показано, что почти все неособые поверхности уровня имеют специальную квазипериодическую структуру.

Как физический пример к вопросу об исследовании структуры поверхностей уровня морсовской формы рассматривалась задача о полуклассическом движении электрона в решетке при наличии слабого однородного магнитного поля. Эта задача впервые была сформулирована С.П.Новиковым в работе [20]. Она обсуждалась также в обзоре [21], и подробно изучалась в работе А.В.Зорича [9], где рассматривались траектории движения, определяемые магнитным полем, близким к рациональному, и в работах И.А.Дынникова [6, 7, 8], в которых рассматривались произвольные магнитные поля. Было доказано, что неособая незамкнутая траектория лежит в полосе конечной ширины и проходит эту полосу насквозь.

Топологическая структура слоения $\mathcal{F}_\omega$, определяемого морсовской формой ω, исследовалась разными авторами в зависимости от характеристик формы (степени иррациональности формы, структуры множества особых точек) и многообразия (структуры фундаментальной группы).

В работе [20] С.П.Новиковым для замкнутой 1-формы ω было введено понятие степени иррациональности формы $\operatorname{dirr}\omega$ (число несоизмеримых периодов формы минус 1), и показано, что поверхности уровня формы ω являются компактными тогда и только тогда, когда $\operatorname{dirr}\omega \le 0$.

Таким образом, если $\operatorname{dirr}\omega \le 0$, то все слои, то есть компоненты связности поверхности уровня, компактны, следовательно, по определению ([?]), слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. Обратное неверно: нетрудно показать что, компактное слоение может быть задано нерациональной формой ω: $\operatorname{dirr}\omega \ge 1$. В этом случае поверхности уровня состоят из бесконечного числа компактных слоев.

Если форма ω неособа, $\operatorname{Sing}\omega = \emptyset$, то все поверхности уровня связны, то есть представляют собой слои. В этом случае степень иррациональности однозначно определяет топологию слоения: если $\operatorname{dirr}\omega \le 0$, то слоение компактно; если $\operatorname{dirr}\omega \ge 1$, то все слои плотны.

Однако, как показал Д.Тышлер в работе [?], единственным классом многообразий, допускающих неособые замкнутые формы, являются расслоения над окружностью.

В работе [28] Д.Хенц рассматривал эргодические свойства морсовских форм, когомологический класс которых содержит неособую форму. Слоение называется эргодическим, если любое голономно инвариантное множество на трансверсали имеет меру нуль или полную меру. Пусть ω и ω_0 — две когомологичные замкнутые формы на многообразии M, причем форма ω_0 неособа и $\operatorname{dirr}\omega_0 \geq 1$, соответственно, слои слоения $\mathcal{F}_{\omega_0}$, определяемого формой ω_0, плотны. Обозначим через M_ω множество, получающееся из многообразия M выбрасыванием компактных слоев слоения $\mathcal{F}_\omega$. Доказано, что M_ω есть непустое связное открытое множество, и форма ω определяет на этом множестве эргодическое слоение с плотными слоями.

Х.Иманиши в работе [29] показал, что каждый слой слоения, определяемого морсовской формой, либо замкнут либо локально плотен. Г.Левитт рассмотрел для произвольной морсовской формы множество M_ω, состоящее из некомпактных слоев, и показал, что это множество имеет конечное число компонент связности, причем слой $\gamma \in M_\omega$ плотен в своей компоненте связности и слоение эргодично на M_ω [27].

В работе [30] Г.Левитт рассмотрел морсовские формы, не имеющие особенностей индекса 0 и n, $\operatorname{Sing}\omega \neq \emptyset$, у которых, как и у неособых форм, поверхности уровня являются связными, такие формы называются слабо полными. Очевидно, что слоение слабо полной формы однозначно определяется степенью иррациональности.

Было доказано, что на компактном многообразии M^n, $n \geq 3$, каждый ненулевой класс когомологий де Рама содержит слабо полную форму. Соответственно, если $\operatorname{dirr}\omega \geq 1$, то в классе $[\omega]$ существует форма ω', которая определяет слоение $\mathcal{F}_{\omega'}$, не имеющее компактных слоев и являющееся эргодическим ([27]).

Эргодические свойства морсовских форм с неисоизмеримыми периодами на двумерных поверхностях исследовались В.И.Арнольдом в работе [2].

Зависимость топологии слоения $\mathcal{F}_\omega$ от структуры фундаментальной группы $\pi_1(M)$ исследовалась в работах Г.Левитта и П.Арнуа [27, 30].

Было доказано, что если группа $\pi_1(M)$ свободна, то в каждом классе когомологий де Рама существуют как формы, определяющие компактное слоение, так и формы, не имеющие компактных слоев. То есть, в этом случае исходя из $\operatorname{dirr}\omega$, ничего определенного о структуре слоения $\mathcal{F}_\omega$ сказать нельзя.

Обозначим $[\omega] : \pi_1(M) \to \mathbb{R}$ — отображение интегрирования по замкнутым путям. Если отображение $[\omega]$ не пропускается через свободную группу, то форма ω имеет некомпактный слой ([27]).

Если отображение $[\omega]$ не пропускается через эпиморфизм $\alpha : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}^a \oplus \mathbb{Z}^b$, $a, b \geq 1$, то форма ω (и все когомологичные формы) слабо полна. Соответственно, структура $\mathcal{F}_\omega$ определяется степенью иррациональности формы $\operatorname{dirr}\omega$.

Если многообразие M таково, что не существует эпиморфизм $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, то все формы слабо полны, соответственно, $\operatorname{dirr}\omega$ однозначно определяет топологию слоения $\mathcal{F}_\omega$.

Структура слоения морсовской формы зависит также от характера ее особых точек. Обозначим Ω_k — число особых точек формы ω индекса k и $n-k$. Г.Левитт в работе [27] показал, что если $\Omega_1 = \emptyset$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ либо компактно, либо минимально и эргодично, и его структура определяется степенью иррациональности формы.

В работах К.Ямато [33, 34] было показано, что если на многообразии M задана морсовская форма ω такая, что $\Omega_0 \neq \emptyset$ и $\Omega_1 = \emptyset$, то форма точна и, соответственно, слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. В теореме 2.2 данной работы доказано более общее утверждение: если $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, то форма точна.

В настоящей работе топологическая структура слоения морсовской формы ω исследуется в связи с такими характеристиками формы как ее степень иррациональности формы и структура множества ее особых точек. Также рассматривается отображение пересечения $(n-1)$ - мерных гомологических классов, максимальные изотропные подгруппы этого отображения и их связь с компактными слоениями.

В общем случае, как нетрудно показать, компактное слоение может быть задано нерациональной формой, $\operatorname{dirr}\omega \geq 1$. Для морсовских форм, определяющих компактное слоение, получена следующая верхняя оценка на степень иррациональности:

$$\operatorname{dirr}\omega \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|)$$

где Ω_k — число особых точек формы ω индекса k и $n-k$ (Теорема 3.3).

При доказательстве этого неравенства использовался граф множества компактных слоев. Техника теории графов для изучения слоений морсовской формы использовалась в работах Г.Левитта [31, 32]. Графы слоения упоминались также в работе В.И.Арнольда [3].

Еще одна верхняя оценка на степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение, зависит от гомологической структуры многообразия:

$$\operatorname{dirr}\omega \leq h_0(M^n) - 1$$

здесь $h_0(M^n)$ — ранг максимальной изотропной подгруппы в $H_{n-1}(M^n)$ относительно операции пересечения гомологических классов (Следствие 2.1). В частном случае, для морсовской формы, определяющей компактное слоение на M_g^2, имеем следующую оценку (Теорема 1.3):

$$\operatorname{dirr}\omega \leq g - 1$$

Морсовская форма ω с несоизмеримыми периодами, $\operatorname{dirr}\omega \geq 1$, может иметь некомпакные слои. Приведенные выше неравенства позволяют сформулировать признак существования некомпактного слоя у слоения $\mathcal{F}_\omega$: если на многообразии M^n степень иррациональности $\operatorname{dirr}\omega \geq h_0^{max}(M^n)$, либо $\operatorname{dirr}\omega > \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|)$, то слоение морсовской формы ω имеет некомпактный слой.

Показано, что если на многообразии M^n отображение пересечения $(n-1)$ – мерных гомологических классов не тождественно нулевое, то слоение морсовской формы общего положения имеет некомпактный слой.

Как было замечено выше, рациональная форма определяет компактное слоение. В следствии 2.4, для морсовских форм доказан обратный результат: компактное слоение $\mathcal{F}_\omega$ морсовской формы ω может быть задано рациональной формой ω', то есть существует форма ω' такая, что $\operatorname{dirr}\omega' = 0$ и $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}_{\omega'}$.

В работе [19] С.П.Новиковым была поставлена задача о построении аналога теории Морса для замкнутых 1-форм или многозначных функций на гладких компактных многообразиях. Естественные примеры многозначных функционалов были рассмотрены и использованы в работах [17, 18] при исследовании периодических решений уравнений типа Кирхгофа, волчка в гравитационном поле, заряженной частицы в магнитном поле.

Для рациональных форм С.П.Новиковым в работе [19] были получены неравенств типа Морса на число особых точек формы ω. Аналоги чисел Бетти и чисел кручения зависят от когомологического класса $[\omega]$. М.Ш.Фарбер в работе [24] показал точность этих неравенств для многообразий с группой $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. А.В.Пажитнов в работе [23] доказал точность неравенств типа Морса для многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой.

В данной работе, в теореме 3.4, было доказано следующее неравенство для особых точек морсовской формы:

$$|\Omega_0| \leq |\Omega_1| + 2$$

Приведенное неравенство справедливо для морсовской формы произвольной степени иррациональности.

В главе 1 вводится понятие особого и неособого слоя слоения $\mathcal{F}_\omega$, определяемого морсовской формой ω, а также подгруппа $H_\omega \subset H_{n-1}(M^n)$, порожденная неособыми компактными слоями слоения $\mathcal{F}_\omega$. Рассматривается отображение пересечения $(n-1)$ – мерных гомологических классов: $H_{n-1}(M^n) \times H_{n-1}(M^n) \to H_{n-2}(M^n)$. Вводится понятие изотропной подгруппы этого отображения. Подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, очевидно, является изотропной. Приводятся верхние и нижние оценки на ранг максимальной изотропной подгруппы $h_0(M)$.

Доказывается признак компактности слоения (теорема 1.1): если подгруппа H_ω является максимальной изотропной подгруппой относительно операции пересечения гомологических классов, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно.

Показано, что в общем случае, при $n > 2$, обратное утверждение неверно: существуют компактные слоения, у которых подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, не является максимальной. Приведен пример в размерности три. Показано, как обобщается приведенная конструкция на размерность $n > 3$. В случае размерности два доказано, что этот признак является критерием (теорема 1.2).

В главе 2 изучаются компактные слоения морсовской формы. Строится разбиение многообразия, обладающего компактным слоением морсовской формы, на множества V_i, которые являются замыканиями максимальных цилиндрических окрестностей неособых слоев: $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$ (теорема 2.1). При этом окрестность $\mathcal{O}(\gamma_i)$ неособого слоя γ_i состоит из диффеоморфных ему слоев.

С помощью построенного разбиения получена оценка на степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение (теорема 2.2):

$$\operatorname{dirr} \omega \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$$

Эта оценка является точной в следующем смысле (следствие 2.3): существует форма ω' такая, что $\operatorname{dirr} \omega' = \operatorname{rk} H_\omega - 1$ и $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}_\omega$. Более того, для любого целого p такого, что $0 \leq p \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$, существует форма ω' такая, что $\operatorname{dirr}\omega' = p$ и $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}_{\omega}$ (теорема 2.3).

Доказан критерий компактности слоения (следствие 2.4): $\mathcal{F}_{\omega}$ компактно в том и только том случае, когда существует функция $f : M \to \mathbb{R}\backslash 0$ такая, что $df \wedge \omega = 0$ и $\operatorname{dirr}(f(x)\omega) = 0$.

Показано, что если на многообразии M^n отображение пересечения $(n-1)$ – мерных гомологических классов не тождественно нулевое, то слоение морсовской формы общего положения имеет некомпактный слой (теорема 2.4). Приведен пример многообразия с нулевым пересечением гомологических классов, на котором слоение морсовской формы общего положения компактно.

В главе 3 рассматриваются особые точки морсовской формы ω и их связь с топологией слоения $\mathcal{F}_{\omega}$. Замыканию множества U неособых компактных слоев ставится в соответствие граф, вершинами которого являются компоненты связности пересечения множества $\overline{U}$ с особыми слоями. Степень вершины графа оценивается через число особых точек индекса 0 и 1, лежащих на соответствующем особом слое (теорема 3.1).

С помощью ассоциированного графа компактных слоев для компактного слоения морсовской формы доказываются следующие оценки (теоремы 3.2, 3.3):

$$\operatorname{rk} H_{\omega} \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|) + 1$$

$$\operatorname{dirr}\omega \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|)$$

Для особых точек произвольной морсовской формы доказано следующее неравенство (теорема 3.4):

$$|\Omega_0| \leq |\Omega_1| + 2$$

Показано, что если особые точки формы ω удовлетворяют неравенству $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, то слоение, определяемое этой формой, компактно, более того форма ω точна: $\omega = df$ (теорема 3.4).

Если особые точки морсовской формы ω удовлетворяют неравенству $|\Omega_1| - 1 \leq |\Omega_0| \leq |\Omega_1|$, то справедлив следующий критерий (теорема 3.5): слоение, определяемое этой формой, компактно тогда и только тогда, когда $\operatorname{dirr} \omega \leq 0$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Александру Сергеевичу Мищенко за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

1. Признак компактности слоения морсовской формы

1.1. Подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, и пересечение гомологических классов

Рассмотрим гладкое компактное связное ориентируемое многообразие M^n и определенную на нем замкнутую 1-форму ω с морсовскими особенностями, такую форму будем называть морсовской. Локально форма ω является дифференциалом функции Морса. Обозначим множество ее особых точек $\operatorname{Sing}\omega$. Поскольку многообразие M^n компактно, то $\operatorname{Sing}\omega$ — конечное множество.

Замкнутая форма ω определяет на множестве $M \setminus \operatorname{Sing}\omega$ слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1. Соответственно, на многообразии M определено слоение с особенностями $\mathcal{F}_\omega$, получаемое присоединением особых точек. Ниже определим особые и неособые слои слоения $\mathcal{F}_\omega$.

В окрестности каждой особой точки $p \in \operatorname{Sing}\omega$ форма точна, $\omega = df_p$, положим $f_p(p) = 0$. Слоение $\mathcal{F}$ локально определяется уровнями функции f_p. Очевидно, что $f_p^{-1}(0) \setminus p \subset \cup\gamma_i$, где $\gamma_i \in \mathcal{F}$.

Определение 1.1. *Слой $\gamma \in \mathcal{F}$ называется неособым слоем слоения $\mathcal{F}_\omega$, если $\forall p \in \operatorname{Sing}\omega \quad \gamma \cap f_p^{-1}(0) = \emptyset$.*

Обозначим $F_p = p \cup \{\gamma \in \mathcal{F} |\ \gamma \cap f_p^{-1}(0) \neq \emptyset\}$. Пусть $F = \bigcup\limits_{p \in \operatorname{Sing}\omega} F_p$.

Определение 1.2. *Особым слоем γ_0 слоения $\mathcal{F}_\omega$ называется максимальная связная компонента множества F.*

Таким образом, особый слой состоит из особых точек $\operatorname{Sing}\omega$ и слоев слоения $\mathcal{F}$. Если особый слой γ_0 содержит единственную особую точку p, то $\gamma_0 = F_p$. Число особых слоев конечно, поскольку конечно число особых точек формы ω.

Заметим, что определенные таким образом слои не пересекаются, то есть слоение с особенностями $\mathcal{F}_\omega$ определено корректно. Действительно, особые слои не пересекаются, так как представляют собой максимальные связные компоненты множества F. Неособые слои не пересекаются, так как являются слоями слоения $\mathcal{F}$. Пусть γ — неособый слой, γ_0 — особый слой, очевидно, $\gamma_0 = \cup p_i \cup \gamma_j$, где $p_i \in \operatorname{Sing}\omega$, $\gamma_j \in \mathcal{F}$. Поскольку $\gamma, \gamma_j \in \mathcal{F}$, то $p_i \cap \gamma = \emptyset$ и $\gamma_j \cap \gamma = \emptyset$. Следовательно, $\gamma_0 \cap \gamma = (\cup p_i \cup \gamma_j) \cap \gamma = \emptyset$.

На универсальном накрытии $\pi : \widehat{M} \to M$, где $\pi^*\omega = df$, неособому слою γ соответствует неособая поверхность уровня $\widehat{\gamma}$ функции f, особому слою γ_0 соотвествует поверхность уровня $\widehat{\gamma}_0$, на которой лежат особые точки функции f.

Определение 1.3. *Рассмотрим неособые компактные слои $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$ и отображение $\gamma \to [\gamma] \in H_{n-1}(M)$, сопоставляющее компактному слою γ его гомологический класс $[\gamma]$. Образ множества неособых компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_{n-1}(M)$. Обозначим ее H_ω.*

Поскольку многообразие M^n ориентируемо, то группа $H_{n-1}(M)$ не имеет кручения. Подгруппа H_ω является, очевидно, свободной и конечнопорожденной. Поскольку $H_\omega \subseteq H_{n-1}(M)$, то $0 \leq \operatorname{rk} H_\omega \leq \beta_{n-1}(M)$, где $\beta_{n-1}(M) = \operatorname{rk} H_{n-1}(M)$.

Если все слои слоения $\mathcal{F}_\omega$ некомпактны, то $\operatorname{rk} H_\omega = 0$. Обратное неверно: так, слои слоения, определяемого замкнутой формой на многообразии M^n с условием $H_{n-1}(M^n) = 0$, компактны и при этом гомологичны нулю.

Рассмотрим группу $H_{n-1}(M)$ и операцию пересечения гомологических классов $H_{n-1}(M) \times H_{n-1}(M) \to H_{n-2}(M)$ определенную следующим образом [5]:

Пусть $x, y \in H_{n-1}(M)$, D — оператор двойственности Пуанкаре, тогда пересечение $x \circ y = Dx \cap y$. Если гомологические классы x и y реализуются подмногообразиями X и Y, то $x \circ y$ представляет собой гомологический класс $X \cap Y$. Эта билинейная операция является кососимметричной: $x \circ y = -\, y \circ x$.

Определение 1.4. *Подгруппа* $H \subseteq H_{n-1}(M)$ *называется изотропной относительно операции пересечения гомологических классов, если* $\forall x, y \in H \quad x \circ y = 0$. *Изотропная подгруппа* H *называется максимальной, если* $\forall x \notin H \quad \exists y \in H \quad x \circ y \neq 0$.

Максимальная изотропная подгруппа определяется, вообще говоря, неоднозначно. Как будет показано далее, ранги различных максимальных изотропных подгрупп для одного многообразия могут быть различны.

Поскольку $\forall \gamma, \gamma' \in \mathcal{F}_\omega \quad \gamma \cap \gamma' = \emptyset$, то для компактных слоев $[\gamma] \circ [\gamma'] = 0$, и подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, является изотропной подгруппой в группе $H_{n-1}(M)$.

Рассмотрим линейное пространство $H_{n-1}(M) \otimes \mathbb{Q} = H_{n-1}(M, \mathbb{Q})$. Свободная конечнопорожденная подгруппа $H_\omega \subseteq H_{n-1}(M)$ порождает подпространство $H_\omega \otimes \mathbb{Q} \subseteq H_{n-1}(M, \mathbb{Q})$, причем $\operatorname{rk} H_\omega = \dim(H_\omega \otimes \mathbb{Q})$. Ввиду билинейности операции пересечения гомологических классов подпространство $H_\omega \otimes \mathbb{Q}$ является изотропным, как и подгруппа H_ω. Выше отмечалось, что $0 \leq \operatorname{rk} H_\omega \leq \beta_1(M)$, где $\beta_1(M) = \operatorname{rk} H_1(M)$. Используя изотропность подпространства $H_\omega \otimes \mathbb{Q}$, получим более точные оценки на величину $\operatorname{rk} H_\omega = \dim(H_\omega \otimes \mathbb{Q})$.

Пусть L, V — конечномерные линейные пространства. Рассмотрим более общий вопрос об изотропных подпространствах пространства L относительно билинейного кососимметричного отображения $\varphi : L \times L \to V$.

Определение 1.5. *Подпространство $L_0 \subseteq L$ называется изотропным относительно отображения φ, если для произвольных $l, l' \in L_0 \quad \varphi(l, l') = 0$. Изотропное подпространство L_0 называется максимальным, если $\forall l \notin L_0 \quad \exists l_0 \in L_0 : \varphi(l, l_0) \neq 0$.*

Всякое одномерное подпространство является изотропным, его можно дополнить до максимального, вообще говоря, неоднозначным образом. Максимальные изотропные подпространства могут иметь несовпадающие размерности, например, отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(a, b) = [[a, b], l]$, где l — фиксированный вектор ($[\ ,\ ]$ — векторное произведение), имеет максимальные изотропные подпространства $L_1 =< l >$, $\dim L_1 = 1$ и $L_2 = l^\perp$, $\dim L_2 = 2$.

Оценим сверху и снизу размерность максимального изотропного подпространства L_0.

Если $L \neq \{0\}$, то $\dim L_0 \geq 1$, поскольку всякое одномерное подпространство является изотропным. Следующее предложение дает более точную нижнюю оценку.

Предложение 1.1. *Пусть L, V — конечномерные линейные пространства, $\varphi : L \times L \to V$ — кососимметричное билинейное отображение и $L_0 \subseteq L$ — максимальное изотропное подпространство. Тогда*

$$\dim L_0 \geq \frac{\dim L}{\dim V + 1}$$

Доказательство. Обозначим $v = \dim V$, $l = \dim L$, $m = \dim L_0$. Выберем в L_0 базис $e_1, ...e_m$ и дополним его до базиса пространства L векторами $g_1, ..., g_{l-m}$. Пусть, от противного, $l - m > vm$, тогда система vm уравнений

$$\sum_{k=1}^{l-m} x^k \varphi(e_i, g_k) = 0, \quad i = 1...m$$

имеет нетривиальное решение, причем $\varphi(e_i, \sum x^j g_j) = 0$ для всех i, что противоречит максимальности L_0. Предложение 1.1 доказано.

Замечание. Имеет место более сильная оценка:

$$\dim L_0 \geq \dim \ker \varphi + \frac{\dim L - \dim \ker \varphi}{\dim V + 1}$$

где $\ker \varphi = \{l \in L \mid \varphi(l, l') = 0 \ \forall l' \in L\}$, обозначим $K = \ker \varphi$. Для доказательства применим предложение 1.1 к отображению факторпространств $L/K \times L/K \to V$ (оно корректно определено) и заметим, что $\dim L/K = \dim L - \dim K$, а $\dim L_0/K = \dim L_0 - \dim K$, поскольку K содержится в любом максимальном изотропном подпространстве.

Оценим размерность максимального изотропного подпространства L_0 сверху.

Предложение 1.2. *Пусть L, V — конечномерные линейные пространства, $\varphi : L\times L \to V$ — кососимметричное билинейное отображение и $L_0 \subseteq L$ — максимальное изотропное подпространство. Тогда*

$$\dim L_0 \le \frac{\dim L \dim V + \dim\ker\varphi}{\dim V + 1}$$

Доказательство. Вложение $L_0 \to L$ индуцирует точную последовательность: $0 \to L_0 \to L$. Применим к ней функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, V)$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(L, V) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}(L_0, V) \to 0$$

Пусть $L_0^\perp = \{\alpha : L \to V \mid \alpha|_{L_0} = 0\}$. Очевидно, $L_0^\perp = \ker\psi$, тогда

$$\dim L_0^\perp = \dim L \dim V - \dim L_0 \dim V \qquad (1)$$

Билинейное отображение φ определяет гомоморфизм $\bar\varphi : L \to \mathrm{Hom}(L, V)$ по формуле $\bar\varphi(l) = \varphi(l, \cdot)$. Рассмотрим ограничение этого отображения на подпространство $L_0 : \bar\varphi_0 = \bar\varphi\mid_{L_0}$. Очевидно, что $\bar\varphi_0 : L_0 \to L_0^\perp$ При этом

$$\dim L_0 = \dim\ker\bar\varphi_0 + \dim\mathrm{im}\,\bar\varphi_0 \le \dim\ker\bar\varphi + \dim L_0^\perp$$

По определению $\ker\bar\varphi = \ker\varphi$ и $\dim L_0 \le \dim\ker\bar\varphi + \dim L_0^\perp$. Сопоставляя с (1), получим требуемое неравенство. Предложение 1.2 доказано.

Предложения 1.1 и 1.2 определяют интервал, в котором лежит значение $\dim L_0$, однако не всякому целому числу, лежащему в этом интервале, соответствует максимальное изотропное подпространство $L_0 \subseteq L$. Доказанные оценки являются точными в следующем смысле: существуют такие пространства L, V и отображение φ, что некоторое максимальное изотропное подпространство $L_0 \subseteq L$ имеет минимальную (или максимальную) возможную размерность.

Верхняя и нижняя оценки совпадают тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: 1) $\dim V = 1$; 2) $\varphi \equiv 0$. В этом случае $\dim L_0$ определяется однозначно, $\dim L_0 = \frac{1}{2}(\dim L + \dim \ker \varphi)$.

Если отображение φ сюръективно, можно получить еще одну оценку на $\dim L_0$, которая при достаточно высокой $\dim V$ является более эффективной, чем верхняя оценка, полученная в предложении 1.2.

Предложение 1.3. *Пусть L, V — конечномерные линейные пространства, $\varphi : L \times L \to V$ — сюръективное кососимметричное билинейное отображение и $L_0 \subseteq L$ — максимальное изотропное подпространство. Тогда*

$$(\dim L - \dim L_0)(\dim L + \dim L_0 - 1) \geq 2 \dim V$$

Доказательство. Обозначим $l = \dim L$, $m = \dim L_0$, $v = \dim V$. Выберем базис $e_1, ..., e_m$ в L_0 и дополним его до базиса пространства L векторами $e_{m+1}, ..., e_l$. Матрица отображения $\varphi(e_i, e_j)$ имеет вид

$$\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
0 & & A & \\
\hline
 & 0 & & B \\
-A & & 0 & \\
 & -B & & 0 \\
\hline
\end{array}$$

где прямоугольная область A содержит $m \cdot (l - m)$ элементов, а треугольная область B содержит $\frac{1}{2}(l-m) \cdot (l-m-1)$ элементов. Таким образом, $\dim \operatorname{im} \varphi \leq m \cdot (l-m) + \frac{1}{2}(l-m) \cdot (l-m-1) = \frac{1}{2}(l-m) \cdot (l+m-1)$. Но по условию $\dim \operatorname{im} \varphi = v$. Предложение 1.3 доказано.

Вернемся к отображению пересечения гомологических классов. Рассмотрим пространство $H_{n-1}(M, \mathbb{Q})$ и отображение $\varphi : H_{n-1}(M, \mathbb{Q}) \times H_{n-1}(M, \mathbb{Q}) \to H_{n-2}(M, \mathbb{Q})$. Обозначим $\beta_k = \beta_k(M)$ — числа Бетти многообразия M. Тогда $\dim H_{n-1}(M, \mathbb{Q}) = \beta_1$, $\dim H_{n-2}(M, \mathbb{Q}) = \beta_2$. Размерность максимального изотропного подпространства $L_0 \subseteq H_{n-1}(M, \mathbb{Q})$ обозначим $h_0(M)$. В силу предложений 1.1 и 1.2 имеем:

$$\dim \ker \varphi + \frac{\beta_1 - \dim \ker \varphi}{\beta_2 + 1} \leq h_0(M) \leq \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 + \dim \ker \varphi}{\beta_2 + 1}$$

Если отображение φ сюръективно, то, согласно предложению 1.3, справедливо неравенство:

$$(\beta_1 - h_0(M))(\beta_1 + h_0(M) - 1) \geq 2\beta_2$$

Поскольку подпространство $H_\omega \otimes \mathbb{Q} \subseteq H_{n-1}(M, \mathbb{Q})$ является изотропным и $\operatorname{rk} H_\omega = \dim(H_\omega \otimes \mathbb{Q})$, то число гомологически независимых компактных слоев оценивается следующим образом: $\operatorname{rk} H_\omega \leq h_0(M)$.

Рассмотрим примеры вычисления $h_0(M)$ для тех многообразий, которые будут полезны в дальнейшем.

Пример 1.1. Пусть $M = T^n$ — n–мерный тор. Отображение пересечения гомологических классов является сюръективным, $\beta_1(T^n) = n$, $\beta_2(T^n) = C_n^2$. Согласно предложению 1.3 имеем:

$$(n - h_0) \cdot (n + h_0 - 1) \geq 2C_n^2$$

Тогда $n \cdot (n-1) + h_0 - h_0^2 \geq 2C_n^2$, следовательно, $h_0^2 - h_0 \leq 0$, то есть $h_0(T^n) \leq 1$. С другой стороны, поскольку $\beta_1(T^n) \neq 0$, то $h_0(T^n) \geq 1$. Таким образом, $h_0(T^n) = 1$.

Пример 1.2. Пусть $M = M_g^2$. Отображение пересечения циклов $\varphi : H_1(M, \mathbb{R}) \times H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ невырождено: $\ker\varphi = 0$, $\beta_1(M_g^2) = 2g$, $\beta_2(M_g^2) = 1$. Согласно предложению 1.1: $h_0(M_g^2) \geq g$. С другой стороны, из предложения 1.2 следует, что $h_0(M_g^2) \leq g$. Следовательно, $h_0(M_g^2) = g$.

1.2. Признак компактности слоения.

Слоение $\mathcal{F}_\omega$ называется компактным, если все его слои компактны. Докажем следующий признак:

Теорема 1.1. *Если подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, является максимальной изотропной подгруппой в группе $H_{n-1}(M)$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} H_\omega = N$ и $H_\omega =< [\gamma_1], ..., [\gamma_N] >$, где γ_i — слои слоения $\mathcal{F}_\omega$. Разрезая многообразие M по слоям $\gamma_1, ..., \gamma_N$, получим M' — многообразие с краем, которое является связным, поскольку слои $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ гомологически независимы. Пусть $\varphi : M' \to M$ — отображение склейки, $i : \partial M' \to M$ отображение вложения края.

Лемма 1.1. *Если H_ω — максимальная изотропная подгруппа, то отображение $i_* : H_{n-1}(\partial M') \to H_{n-1}(M')$ сюръективно.*

Доказательство. Отображение склейки $\varphi : M' \to M$ индуцирует отображение пар $\varphi : (M', \partial M') \to (M, \cup\gamma_i)$. Обозначим $\varphi|_{\partial M'} = \varphi_1$ и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\partial M') & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(M') \\ \downarrow \varphi_{1*} & & \downarrow \varphi_* \\ H_{n-1}(\cup\gamma_i) & \xrightarrow{j} & H_{n-1}(M) \end{array}$$

Покажем, что: 1). $\operatorname{im} j = H_\omega$, 2). отображение φ_{1*} — сюръективно, 3). $\ker \varphi_* \subset \operatorname{im} i_*$.

1). Поскольку слои γ_i не пересекаются: $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, то из последовательности Майера–Виеториса получим:

$$H_{n-1}(\cup\gamma_i) = \oplus H_{n-1}(\gamma_i)$$

Так как $j(H_{n-1}(\gamma_i)) = [\gamma_i]$ и по предположению циклы $[\gamma_i]$ независимы в M, то

$$j(\oplus H_{n-1}(\gamma_i)) =< [\gamma_1], ...[\gamma_N] >= H_\omega$$

причем отображение j является вложением.

2). Поскольку $\varphi(\partial M') = \cup\gamma_i$, то отображение φ_{1*} сюръективно.

3). Если $\varphi_* z' = 0$ и $z' = [c']$, то $\varphi(c') = \partial S$, где $S \subset M$. При разрезании множество $S' = \varphi^{-1}(S)$ в многообразии M' ограничивают цикл c' и компоненты связности края $\partial M'$, соответствующие тем слоям γ_i, для которых $S \cap \gamma_i \neq \emptyset$. Таким образом, $z' \in \operatorname{im} i_*$.

Рассмотрим $z' \in H_{n-1}(M')$, $z' = [c']$, тогда $c' \cap \partial M' = \emptyset$, следовательно, $\varphi(c') \cap \gamma_i = \emptyset$ и $\varphi_* z' \circ [\gamma_i] = 0$, для всех $i = 1, ...N$. По условию, подгруппа H_ω максимальна, следовательно, $\varphi_* z' \in H_\omega$. Поскольку $\operatorname{im} j = H_\omega$, то существует цикл $z = j^{-1}(\varphi_* z')$. Отображение φ_{1*} сюръективно, следовательно, элемент z имеет прообраз в группе $H_{n-1}(\partial M') : z_0 \in \varphi_{1*}^{-1}(z)$. Тогда, в силу коммутативности диаграммы:

$$\varphi_* i_* z_0 = j \varphi_{1*} z_0 = j(z) = \varphi_* z'$$

Следовательно, $z' - i_* z_0 \in \ker \varphi_*$. В силу доказанного выше, $\ker \varphi_* \subset \operatorname{im} i_*$, тогда $z' - i_* z_0 \in \operatorname{im} i_*$ и $z' \in \operatorname{im} i_*$. Следовательно, отображение i_* сюръективно. Лемма 1.1 доказана.

Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$0 \to Z \to H_{n-1}(\partial M') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M') \to 0$$

где $Z = \ker i_*$, и применим к ней функтор $\otimes \mathbb{R}$, который является ковариантным и точным справа [5]. Получим точную последовательность:

$$Z \otimes \mathbb{R} \to H_{n-1}(\partial M') \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{i_R} H_{n-1}(M') \otimes \mathbb{R} \to 0$$

где отображение i_R также сюръективно.

Согласно теореме об универсальных коэффициентах, $H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M) \otimes \mathbb{R}$. Таким образом, из леммы 1.1 следует, что для гомологий с коэффициентами в $\mathbb{R}$ отображение

$$i_* : H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \to H_{n-1}(M', \mathbb{R})$$

тоже сюръективно.

Лемма 1.2. *Пусть* $i : \partial M' \to M'$ *отображение вложения, Если отображение* $i_* : H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \to H_{n-1}(M', \mathbb{R})$ *сюръективно, то отображение* $j : H_1(\partial M', \mathbb{R}) \to H_1(M', \mathbb{R})$ *также сюръективно.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму (гомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{ccc} H_1(M', \partial M') & \xrightarrow{\partial} & H_0(\partial M') \\ \downarrow D & & \downarrow D \\ H^{n-1}(M', \mathbb{R}) & \xrightarrow{i^*} & H^{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \end{array}$$

Здесь D — оператор двойственности Пуанкаре для многообразия с краем.

По условию, отображение $i_* : H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \to H_{n-1}(M', \mathbb{R})$ сюръективно. Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$0 \to Z \to H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M', \mathbb{R}) \to 0$$

где $Z = \ker i_*$. Поскольку $H^{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}), \mathbb{R})$ и, аналогично, $H^{n-1}(M', \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_{n-1}(M', \mathbb{R}), \mathbb{R})$, то применим к этой последовательности функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathbb{R})$, который является контравариантным и точным справа [5]. Получим точную последовательность:

$$\mathrm{Hom}(Z, \mathbb{R}) \leftarrow \mathrm{Hom}(H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \xleftarrow{i^*} \mathrm{Hom}(H_{n-1}(M', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \leftarrow 0$$

из которой следует, что отображение i^* инъективно. Тогда в диаграмме $\ker \partial = 0$.

Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары

$$\to H_1(\partial M') \xrightarrow{j} H_1(M') \xrightarrow{l} H_1(M', \partial M') \xrightarrow{\partial} H_0(\partial M') \to$$

Так как $\ker\partial = \mathrm{im}\, l = 0$, то $\ker l = H_1(M')$. Поскольку $\mathrm{im}\, j = \ker l = H_1(M')$, то отображение j сюръективно. Лемма 1.2 доказана.

Отображение пар $\varphi : (M', \partial M') \to (M, \cup\gamma_i)$ индуцирует следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H^1(M,\mathbb{R}) & \xrightarrow{j^*} & H^1(\cup\gamma_i,\mathbb{R}) \\ \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\ H^1(M',\mathbb{R}) & \xrightarrow{i^*} & H^1(\partial M',\mathbb{R}) \end{array}$$

Из коммутативности диаграммы следует, что $i^*\varphi^*[\omega] = \varphi^* j^*[\omega]$.

Обозначим $\omega' = \varphi^*\omega$ — ограничение формы ω на многообразие M'. Для всякого цикла $z' \in H_1(M')$ согласно лемме 1.2, существует цикл $z \in H_1(\partial M')$ такой, что $z' = i_* z$. Тогда:

$$\int\limits_{z'} \omega' = \int\limits_{i_* z} \varphi^*\omega = \int\limits_{z} i^*\varphi^*\omega = \int\limits_{z} \varphi^* j^*\omega$$

Поскольку $\omega|_{\gamma_i} = 0$, то $j^*\omega = o$, следовательно, $\int\limits_{z'} \omega' = 0$, и форма ω' является точной, $\omega' = df$.

Поскольку ω — морсовская форма, то функция f, определяющая слоение на многообразии M', является морсовской, следовательно, на многообразии M' слоение компактно, и, соответственно, компактно слоение на многообразии M. Теорема 1.1 доказана.

Согласно доказанной теореме, если существует $h_0(M)$ компактных гомологически независимых слоев, то все слои компактны (если значение $h_0(M)$ определено неоднозначно, то рассматривается его максимальное значение $h_0^{max}(M)$).

Пример 1.3. Рассмотрим на торе T^n слоение $\mathcal{F}_\omega$, определяемое морсовской формой ω. Тогда, если существует хотя бы один компактный слой $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$, не гомологичный нулю, то все слои компактны.

Действительно, в примере 1.1 было показано, что $h_0(T^n) = 1$. Следовательно, подгруппа $H_\omega =< [\gamma] >$, порожденная слоем γ, является максимальной изотропной подгруппой в $H_{n-1}(T^n)$, и по теореме 1.1 слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно.

Пример 1.4. Рассмотрим на многообразии M_g^2 слоение $\mathcal{F}_\omega$, определяемое морсовской формой ω. Тогда, для компактности слоения $\mathcal{F}_\omega$ достаточно существования g гомологически независимых компактных слоев $\gamma_1, ..., \gamma_g \in \mathcal{F}_\omega$.

Действительно, в примере 1.2 было показано, что $h_0(M_g^2) = g$. Рассмотрим подгруппу $H_\omega =< [\gamma_1], ..., [\gamma_g] >$. Поскольку слои $\gamma_1, ..., \gamma_g$ гомологически независимы, то $rkH_\omega = g$, следовательно, подгруппа H_ω является максимальной изотропной подгруппой в $H_1(M_g^2)$ и по теореме 1.1 слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно.

Таким образом, вычисление $h_0(M)$ — ранга максимальной изотропной подгруппы в $H_{n-1}(M)$ — оказывается полезным при исследовании вопроса о компактности слоения морсовской формы.

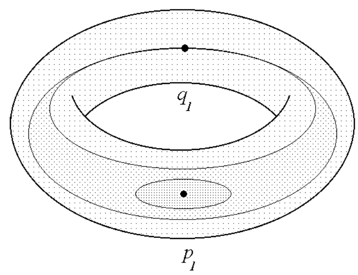
1.3. Пример компактного слоения с немаксимальной подгруппой H_ω

В общем случае, если размерность многообразия выше двух, доказанный признак компактности не может быть дополнен до критерия: то есть существуют компактные слоения $\mathcal{F}_\omega$, у которых подгруппа компактных слоев H_ω не является максимальной.

Рассмотрим трехмерное многообразие $M^3 = S^2 \times S^1$ и построим на M^3 функцию Морса. Для этого представим многообразие M^3 в виде объединения двух полноторий, склеенных по границе: $M^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, где $\Pi_i = D^2 \times S^1$.

На полнотории Π_1 построим функцию Морса f_1, предъявляя ее поверхности уровня.

1). Граница полнотория Π_1 есть уровень функции f_1. Близкими поверхностями уровня будут торы, диффеоморфные $\partial\Pi_1$ и лежащие внутри Π_1.



2). Постепенно перетягивая меридиан тора, получим особый слой с седловой особой точкой q_1.
3). Внутри этого особого слоя уровнями функции будут сферы, которые постепенно стянутся к точке $p_1 \in \operatorname{Int}\Pi_1$. Эту точку можно считать минимумом функции f_1.

Аналогичное построение проведем для полнотория Π_2. Получим функцию f_2 с особыми точками p_2 — максимум и q_2 — седло. Функция f_2 строится таким образом, чтобы на границе полноторий выполнялось равенство $f_1 = f_2$ и функции склеивались гладким образом.

Таким образом, на многообразии $S^2 \times S^1$ построена функция Морса f с четырьмя особыми точками. Все неособые поверхности уровня этой функции связны (они представляют собой сферы S^2 и торы T^2), следовательно, являются слоями определяемого ею слоения, и гомологичны нулю, то есть $H_\omega = 0$, где $\omega = df$.

С другой стороны, $H_2(S^2 \times S^1) = [S^2]$ и для любого слоя $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$, очевидно, $[\gamma] \circ [S^2] = 0$, поскольку γ гомологичен нулю в M^3. Следовательно, подгруппа H_ω не является максимальной изотропной подгруппой.

Заметим, что этот пример естественным образом обобщается на случай многообразия $M^n = S^{n-1} \times S^1$, где $n \geq 3$. Функция Морса f строится аналогичным образом: многообразие M^n представляется в виде $M^n = (D_1^{n-1} \cup D_2^{n-1}) \times S^1 = (D_1^{n-1} \times S^1) \cup (D_2^{n-1} \times S^1)$, на каждом многообразии $(D_i^{n-1} \times S^1)$ строится функция Морса с двумя особыми точками. Неособые поверхности уровня этой функции представляют собой сферы S^{n-1} и подмногообразия $S^{n-2} \times S^1$. В случае $n \geq 3$ эти подмногообразия являются связными, следовательно, представляют собой гомологичные нулю слои слоения $\mathcal{F}_\omega$, где $\omega = df$. Соответственно, подгруппа $H_\omega = 0$. С другой стороны, $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^1) = [S^{n-1}]$ и для любого слоя $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$, очевидно, $[\gamma] \circ [S^{n-1}] = 0$, поскольку γ гомологичен нулю в M^n. Следовательно, подгруппа H_ω не является максимальной изотропной подгруппой.

В двумерном случае поверхности уровня $S^0 \times S^1$ не являются связными и представляют собой объединение двух слоев, каждый из которых не гомологичен нулю, следовательно, $\operatorname{rk} H_\omega \geq 1$. При этом $M^2 = S^1 \times S^1$, и как было показано в примере 1.1 $h_0(T^2) = 1$, следовательно, подгруппа H_ω является максимальной.

Оказывается, в двумерном случае доказанный выше признак компактности слоения может быть дополнен до критерия.

1.4. Случай размерности два: критерий компактности

В двумерном случае отображение пересечения гомологических классов $H_1(M_g^2) \times H_1(M_g^2) \to \mathbb{R}$ представляет собой невырожденную билинейную форму. Эта особенность дает возможность дополнить теорему 1.1 до критерия компактности. Рассмотрим слоение $\mathcal{F}_\omega$, на каждом особом слое которого лежит ровно одна особая точка. Справедлив следующий критерий.

Теорема 1.2. *На многообразии M_g^2 слоение морсовской формы $\mathcal{F}_\omega$ компактно тогда и только тогда, когда подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, является максимальной изотропной подгруппой.*

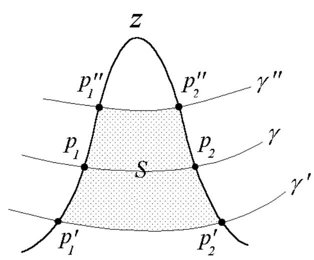
Доказательство. Если подгруппа H_ω максимальна, то слоение компактно по теореме 1.1.

Обратно, пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. Рассмотрим неособый слой $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$ и произвольную кривую z, трансверсальную к γ и такую, что $[z] \circ [\gamma] = 0$. Покажем, что в классе гомологий $[z]$ существует кривая z' такая, что $z' \cap \gamma = \emptyset$.

Пересечение кривых $z \cap \gamma$ представляет собой четное число точек $p_1, ..., p_{2k}$, которым приписаны знаки, соответствующие локальным индексам пересечения.

Пусть сначала $k = 1$, то есть $z \cap \gamma = p_1 \cup p_2$, причем точки p_1 и p_2 упорядочены в соответствии с движением вдоль кривой γ.

Слой γ является неособым, следовательно, в некоторой его окрестности форма ω неособа и корректно определен сдвиг g^t слоя γ вдоль градиенто - подобного векторного поля, определяемого формой ω.



Пусть $g^t = \gamma_t$, где $\gamma_t \in \mathcal{F}_\omega$ и $\gamma_0 = \gamma$. Кривые $p_{it} = z \cap \gamma_t$ (где $|t| \leq \varepsilon$ для некоторого малого ε) представляют собой отрезки с концами $p_i' = p_{i,-\varepsilon}$ и $p_i'' = p_{i\varepsilon}$. Обозначим $\gamma' = \gamma_{-\varepsilon}$ и $\gamma'' = \gamma_\varepsilon$.

Выберем отрезки $[p_1', p_2'] \subset \gamma'$ и $[p_1'', p_2''] \subset \gamma''$ таким образом, чтобы замкнутая кривая, состоящая из отрезков p_{1t}, $[p_1'', p_2'']$, p_{2t} и $[p_1', p_2']$, была гомотопна нулю и содержала отрезок $[p_1, p_2]$. Тогда точки p_1, p_1', p_2', p_2 представляют собой вершины четырехугольника S. Поскольку локальные индексы пересечения кривых z и γ в точках p_1 и p_2 различны, то можно выбрать ориентацию кривой ∂S, совпадающую с ориентацией кривой z на множестве $z \cap \partial S$. Так как $z \cap \gamma = \partial S \cap \gamma$, то кривая $z' = z - \partial S$ не пересекается со слоем γ, $z' \cap \gamma = \emptyset$ и $[z'] = [z]$.

Пусть теперь $k > 1$ и точки $p_1, \ldots, p_{2k}$ упорядочены в соответствии с движением вдоль кривой γ. Тогда, поскольку $[z] \circ [\gamma] = 0$, найдется пара соседних точек p_i, p_{i+1}, имеющих локальные индексы пересечения противоположных знаков. Применим к этим точкам перестройку, описанную выше. В результате получим кривую z', гомологичную кривой z, у которой точек пересечения со слоем γ на две меньше, чем у кривой z. Повторяя это рассуждение за k шагов мы получим кривую, гомологичную кривой z и не пересекающую слой γ.

Таким образом, мы показали, что если $[z] \circ [\gamma] = 0$, то в классе гомологий $[z]$ существует кривая z' такая, что $z' \cap \gamma = \emptyset$.

Покажем теперь, что подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, является максимальной. В пункте 2.1 (теорема 2.1), для многообразия M, обладающего компактным слоением, построено следующее разбиение: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, где $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$ — замыкание максимальной цилиндрической окрестности неособого слоя γ_i, состоящей из диффеоморфных ему слоев. Очевидно, что $H_\omega =< [\gamma_1], \ldots, [\gamma_N] >$.

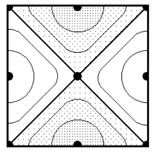
Рассмотрим 1-цикл $[z]$ такой, что $[z] \circ [\gamma_i] = 0$ для всех i. Как было показано выше, в классе гомологий $[z]$ существует кривая z' такая, что $z' \cap \gamma_i = \emptyset$ для любого i. Следовательно, связные компоненты кривой z' вытесняются на множество $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \partial V_i$.

Поскольку V_i — замыкание цилиндра с основанием γ_i, то множество ∂V_i имеет не более двух компонент связности, $\partial V_i = \partial_1 V_i \cup \partial_2 V_i$, и $[\partial_k V_i] = [\gamma_i]$. Как следует из доказательства теоремы 2.1, особый слой представляет собой связное объединение множеств $\partial_k V_i$, то есть компонентой связности множества $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \partial V_i$ является особый слой.

По условию теоремы на особом слое лежит ровно одна особая точка, следовательно, для точек индекса 1 особый слой γ_0 представляет собой букет двух окружностей: $\gamma_0 = \partial_k V_i \vee \partial_{k'} V_{i'}$.

Пусть $z' = \cup z'_j$, где z'_j — связные компоненты z'. Поскольку $z' \in \bigcup\limits_{i=1}^{N} \partial V_i$, то каждая кривая z'_j лежит в некотором особом слое. Пусть $z'_j \subset \gamma_0 = \partial_k V_i \vee \partial_{k'} V_{i'}$, тогда $[z'_j] \in < [\gamma_i], [\gamma_{i'}] > \subset H_\omega$.

Следовательно, $[z] \in H_\omega$ и подгруппа H_ω является максимальной. Теорема 1.2 доказана.



Следующий пример показывает, что условие на число особых точек, принадлежащих особому слою, существенно. На торе T^2 задано компактное слоение $\mathcal{F}_\omega$, причем все неособые слои гомологичны нулю, то есть $H_\omega = 0$. Особый слой γ_0 содержит две особые точки. Очевидно, что $\forall [z] \neq 0 \quad [z] \circ H_\omega = 0$, однако, $[z] \notin H_\omega$, то есть подгруппа H_ω не является максимальной.

Эта теорема имеет полезное следствие. Сначала введем необходимое определение.

Определение 1.6. *Степенью иррациональности формы ω называется следующее число:*

$$\operatorname{dirr} \omega = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}} \left\{ \int\limits_{z_1} \omega, \ldots, \int\limits_{z_m} \omega \right\} - 1$$

где $z_1, \ldots, z_m$ — базис в $H_1(M)$ [20].

Рассмотрим слоение $\mathcal{F}_\omega$, на каждом особом слое которого лежит ровно одна особая точка. Справедлива следующая оценка:

Теорема 1.3. *Если слоение на M_g^2, определяемое морсовской формой ω, компактно, то $\operatorname{dirr} \omega \leq g - 1$.*

Доказательство. Поскольку слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то по теореме 1.2 подгруппа H_ω максимальна. В примере 1.2 было показано, что $h_0(M_g^2) = g$, то есть $\operatorname{rk} H_\omega = g$. Значит, существует g

гомологически независимых слоев, обозначим их $\gamma_1, ..., \gamma_g$. Дополним H_ω до базиса в $H_1(M_g^2)$ 1-циклами $z_1, ..., z_g$. Согласно определению 1.6:

$$\operatorname{dirr}\omega = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}\left\{\int\limits_{\gamma_1}\omega, ..., \int\limits_{\gamma_g}\omega, \int\limits_{z_1}\omega, ..., \int\limits_{z_g}\omega\right\} - 1$$

Поскольку $\gamma_i \in \mathcal{F}_\omega$, то $\int\limits_{\gamma_i}\omega = 0$ и $\operatorname{dirr}\omega \leq g - 1$. Теорема доказана.

Таким образом, если $\operatorname{dirr}\omega \geq g$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ имеет некомпактный слой.

Заметим, что в последней теореме условие на число особых точек, принадлежащих особому слою, не является существенным, это будет доказано в главе 2. Более того, в следующей главе будет доказано обобщение теоремы 1.3 на случай произвольной размерности.

2. Степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение

2.1. Разбиение многообразия, обладающего компактным слоением морсовской формы

Рассмотрим структуру слоения $\mathcal{F}_\omega$ в окрестности неособого компактного слоя $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$.

Лемма 2.1. *Неособый компактный слой γ обладает окрестностью $\mathcal{O}(\gamma)$, состоящей из диффеоморфных ему слоев. В окрестности $\mathcal{O}(\gamma)$ форма ω точна.*

Доказательство. Поскольку слой γ является неособым, то в некоторой его окрестности форма ω не имеет особых точек. Следовательно, в этой окрестности определено векторное поле ξ такое, что $\omega(\xi) = 1$. Поскольку локально $\omega = df$, то в качестве поля ξ можно выбрать градиенто-подобное векторное поле $\xi^i = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|^2}\, g^{ij}\, \partial_j f$, где g^{ij} — метрика.

В окрестности $\mathcal{O}(x)$ точки $x \in \gamma$ векторное поле ξ задает локальный фазовый поток $g_x : \mathcal{O}(x) \times (-\varepsilon(x), \varepsilon(x)) \to M$.

Поскольку γ компактен, покрытие $\{\mathcal{O}(x)\}$ слоя γ имеет конечное подпокрытие $\{U_i = \mathcal{O}(x_i)\}$. Пусть $\varepsilon = \min \varepsilon(x_i)$, тогда, в силу локальной теоремы единственности, векторное поле ξ в окрестности $U = \cup U_i$ слоя γ задает локальный фазовый поток $g : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. Поскольку $\omega(\xi) = 1$, диффеоморфизмы $g^t : U \to M$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ переводят слой в слой: $g^t\gamma = \gamma_t$, $\gamma_t \in \mathcal{F}_\omega$.

Обозначим $\mathcal{O}(\gamma) = \bigcup\limits_{t \in (-\varepsilon,\varepsilon)} \gamma_t$, тогда отображение $g : \gamma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{O}(\gamma)$, действующее по формуле $g(x,t) = g^t x$, определяет диффеоморфизм $\mathcal{O}(\gamma) \simeq \gamma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Так как $\omega|_\gamma = 0$, то в цилиндрической окрестности $\mathcal{O}(\gamma)$ форма точна, $\omega = df$, и слоение определяется уровнями функции f. Поскольку $\omega(\xi) = 1$, то $\frac{d}{dt}f(g^t x) = 1$. Положим $f|_\gamma = 0$, тогда слой $\gamma_t = g^t\gamma$ является поверхностью уровня $\{f(x) = t\}$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{O}(\gamma)$ — окрестность неособого слоя γ, состоящая из диффеоморфных ему слоев. Обозначим $V = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$. Тогда связная компонента множества ∂V содержится в некотором слое.*

Доказательство. Обозначим $\partial_1 V$ компоненту связности множества ∂V. Рассмотрим точку $x \in \partial_1 V$, через эту точку проходит некоторый слой γ_x. Если $\gamma_x \cap \mathcal{O}(\gamma) \neq \emptyset$, то $\gamma_x \subset \mathcal{O}(\gamma)$ и $\gamma_x \cap \partial V = \emptyset$, что противоречит выбору точки x. Следовательно, $\gamma_x \cap \mathcal{O}(\gamma) = \emptyset$.

Поскольку $d\omega = 0$, то существует окрестность $\mathcal{O}(x)$ точки x, в которой слоение определяется уровнями некоторой функции f. Пусть окрестность $\mathcal{O}(x)$ достаточно мала, чтобы каждое из множеств $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(\gamma)$ и $\mathcal{O}(x) \backslash \mathcal{O}(\gamma)$ имело ровно одну компоненту связности. Положим $f(x) = 0$. Из доказанного выше следует, что $f^{-1}(0) \cap \mathcal{O}(\gamma) = \emptyset$. Поскольку $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(\gamma) \neq \emptyset$, то существует $t_0 \neq 0$ такое, что $f^{-1}(t_0) \cap \mathcal{O}(\gamma) \neq \emptyset$. Пусть $t_0 < 0$.

Предположим, $\exists t < 0$ такое, что $f^{-1}(t) \cap \mathcal{O}(\gamma) = \emptyset$. Если $t < t_0$, то множество $\mathcal{O}(x) \backslash \mathcal{O}(\gamma)$ имеет две компоненты связности, что противоречит выбору $\mathcal{O}(x)$. Пусть $t > t_0$, тогда, поскольку множество $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(\gamma)$ связно, $\forall t' \in [t, 0]$ $f^{-1}(t') \cap \mathcal{O}(\gamma) = \emptyset$. Следовательно, существует окрестность $U(x)$ такая, что $U(x) \cap \mathcal{O}(\gamma) = \emptyset$, то есть $x \notin \partial V$. Противоречие.

Таким образом, $\forall t < 0$ $f^{-1}(t) \cap \mathcal{O}(\gamma) \neq \emptyset$ и $f^{-1}(t) \subset \gamma_t \subset \mathcal{O}(\gamma)$.

Рассмотрим точку $x' \in \partial_1 V \cap \mathcal{O}(x)$ и значение $f(x')$. Поскольку $x' \notin \mathcal{O}(\gamma)$, то $f(x') \geq 0$. Если $f(x') > 0$, то существует окрестность $\mathcal{O}(x')$, в которой $f > 0$, следовательно, $\mathcal{O}(x') \cap \mathcal{O}(\gamma) = \emptyset$ и $x' \notin \partial V$. Противоречие. Следовательно, $f(x') = 0$ и $x' \in \gamma_x$.

Итак, $\partial_1 V \cap \mathcal{O}(x) \subset \gamma_x$. Покроем множество $\partial_1 V$ системой таких окрестностей $\mathcal{O}(x)$. Если $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$, то, очевидно, $\gamma_x = \gamma_y$. Следовательно, существует слой γ' такой, что $\partial_1 V \subset \gamma'$. Лемма 2.2 доказана.

Пусть $\mathcal{O}_1(\gamma)$, $\mathcal{O}_2(\gamma)$ — различные окрестности слоя γ, состоящие из диффеоморфных ему слоев, тогда $\mathcal{O}_1(\gamma) \cap \mathcal{O}_2(\gamma) \neq \emptyset$ и множество $\mathcal{O}_1(\gamma) \cup \mathcal{O}_2(\gamma)$ тоже является окрестностью слоя γ, состоящей из диффеоморфных ему слоев. Пусть $\mathcal{O}(\gamma)$ — объединение всех таких окрестностей. Очевидно, окрестность $\mathcal{O}(\gamma)$ является максимальной окрестностью слоя γ, состоящей из диффеоморфных ему слоев.

Пусть γ' — еще один неособый компактный слой $\mathcal{F}_\omega$. Очевидно, множества $\mathcal{O}(\gamma)$ и $\mathcal{O}(\gamma')$ либо не пересекаются, либо совпадают. Рассмотрим край замыкания максимальной окрестности.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{O}(\gamma)$ — максимальная окрестность слоя γ, состоящая из диффеоморфных ему слоев. Тогда край множества $V = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$ лежит в объединении особых слоев.*

Доказательство. Согласно лемме 2.2, компонента связности $\partial_1 V$ множества ∂V содержится в некотором слое γ', $\partial_1 V \subset \gamma'$. Если слой γ' является неособым, то согласно лемме 2.1, существует цилиндрическая окрестность $\mathcal{O}(\gamma')$ слоя γ', состоящая из диффеоморфных ему слоев. Очевидно, $\mathcal{O}(\gamma) \subset \mathcal{O}(\gamma) \cup \mathcal{O}(\gamma')$, причем $\mathcal{O}(\gamma) \neq \mathcal{O}(\gamma) \cup \mathcal{O}(\gamma')$, то есть окрестность $\mathcal{O}(\gamma)$ не является максимальной. Противоречие. Следовательно, $\gamma' \cap \mathrm{Sing}\,\omega \neq \emptyset$. Лемма 2.3 доказана.

Рассмотрим структуру максимальной окрестности.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{O}(\gamma)$ — максимальная окрестность слоя γ, состоящая из диффеоморфных ему слоев. Тогда*
1). Если $\mathrm{Sing}\,\omega = \emptyset$, то $\mathcal{O}(\gamma) = M$,
2). Если $\mathrm{Sing}\,\omega \neq \emptyset$, то окрестность $\mathcal{O}(\gamma)$ представляет собой цилиндр с образующей γ: $\mathcal{O}(\gamma) \simeq \gamma \times \mathbb{R}$.

Доказательство. 1). Пусть $\mathrm{Sing}\,\omega = \emptyset$, тогда, согласно лемме 2.3, $\partial V = \emptyset$. Следовательно, множество $\mathcal{O}(\gamma)$ замкнуто и является компонентой связности множества M. По условию многообразие M линейно связно, следовательно, $\mathcal{O}(\gamma) = M$.

2). Согласно лемме 2.1, $\forall \gamma' \in \mathcal{O}(\gamma)$ существует цилиндрическая окрестность $U(\gamma')$, состоящая из диффеоморфных ему слоев. Поскольку окрестность $\mathcal{O}(\gamma)$ максимальна, то $U(\gamma') \subset \mathcal{O}(\gamma)$. Очевидно, что $\mathcal{O}(\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma'} U(\gamma')$.

Рассмотрим пару окрестностей $U(\gamma'), U(\gamma'') \subset \mathcal{O}(\gamma)$. Поскольку окрестности являются цилиндрическими, то число компонент связности их пересечения не превосходит двух, $|U(\gamma') \cap U(\gamma'')| \leq 2$.

Предположим, $|U(\gamma') \cap U(\gamma'')| = 2$, тогда $\partial(\overline{U(\gamma')} \cap \overline{U(\gamma'')}) = \partial\overline{U(\gamma')} \cup \partial\overline{U(\gamma'')}$, следовательно, $\partial(\overline{U(\gamma')} \cup \overline{U(\gamma'')} = \emptyset$ и, в силу связности многообразия M, получим $U(\gamma') \cup U(\gamma'') = M$. В этом случае все слои неособы и $\mathrm{Sing}\,\omega = \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $|U(\gamma') \cap U(\gamma'')| \leq 1$.

Если $U(\gamma') \cap U(\gamma'') \neq \emptyset$, то существует точка $x \in U(\gamma') \cap U(\gamma'')$. Тогда слой γ_x, проходящий через точку x, тоже лежит в пересечении, $\gamma_x \subset U(\gamma') \cap U(\gamma'')$. Следовательно, пересечение представляет собой цилиндр и множество $U(\gamma') \cup U(\gamma'')$ является цилиндрической окрестностью слоя γ' (и γ'').

Рассмотрим максимальную цилиндрическую окрестность $U(\gamma)$ слоя γ. Тогда $\forall \gamma' \notin U(\gamma) \quad U(\gamma') \cap U(\gamma) = \emptyset$. Обозначим $U = \bigcup\limits_{\gamma'} U(\gamma')$, где $\gamma' \notin U(\gamma)$. Тогда, с одной стороны, $U \cap U(\gamma) = \emptyset$. С другой стороны, $\mathcal{O}(\gamma) = U(\gamma) \cup U$. Поскольку множество $\mathcal{O}(\gamma)$ связно и $U(\gamma) \neq \emptyset$, то $\mathcal{O}(\gamma) = U(\gamma)$, то есть окрестность $\mathcal{O}(\gamma)$ является цилиндрической. Лемма 2.4 доказана.

Поскольку множество V является замыканием цилиндра, то его край имеет не более двух компонент связности. Обозначим $\partial V = \partial_1 V \cup \partial_2 V$, где $\partial_i V$ — компоненты связности края.

Определение 2.1. *Множество V приклеивается к особому слою γ_0, если $\partial_1 V \subset \gamma_0$ или $\partial_2 V \subset \gamma_0$.*

Пусть $\gamma_0 \in \mathcal{F}_\omega$ — компактный особый слой. В лемме 2.1 было показано, что в некоторой окрестности неособого компактного слоя форма ω точна. Аналогичный результат справедлив и для особого слоя.

Лемма 2.5. *Пусть $\gamma_0 \in \mathcal{F}_\omega$ — компактный особый слой, тогда*
1). В некоторой окрестности U слоя γ_0 форма ω точна.
2). Неособые слои $\gamma \in U$ являются компактными.

Доказательство. Каждой точке $x \in \gamma_0$ поставим в соответствие окрестность U_x, в которой форма точна. Очевидно, что $\gamma_0 \subset \bigcup\limits_x U_x$. Поскольку слой γ_0 компактен, то из покрытия $\{U_x\}$

можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_i\} : \gamma_0 \subset U = \bigcup\limits_{i=1}^{s} U_i$. Каждому множеству U_i при этом соответствует функция f_i такая, что $df_i = \omega|_{U_i}$.

Окрестности U_i можно выбрать таким образом, чтобы пересечение $\gamma_0 \cap U_i$ имело единственную компоненту связности. Действительно, пусть $\gamma_0 \cap U_i$ имеет более одной компоненты связности. Можно считать, что окрестность U_i лежит в одной карте, следовательно, $\overline{U}_i$ ограничено и замкнуто. Тогда $\gamma_0 \cap \overline{U}_i$ ограничено и замкнуто, следовательно, имеет конечное число связных компонент. Покроем каждую компоненту шарами U_j, радиус которых меньше минимального расстояния между компонентами связности. Таким образом, построено покрытие, в котором пересечение $\gamma_0 \cap U_i$ имеет единственную компоненту связности для каждого i.

В каждой окрестности U_i функция $f_i(x)$ определена с точностью до константы. Пусть точка $x_i \in \gamma_0 \cap U_i$, положим $f_i(x) = \int\limits_{x_i}^{x} \omega$, тогда $\forall x \in \gamma_0 \cap U_i \quad f_i(x) = 0$, поскольку, по построению, множество $\gamma_0 \cap U_i$ связно.

Рассмотрим пересечение $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Если это пересечение имеет компоненту связности V, не пересекающуюся со слоем γ_0, то положим $U_i' = U_i \backslash \overline{V}$. В результате получим покрытие, для которого либо $U_i \cap U_j = \varnothing$ либо $U_i \cap U_j \cap \gamma_0 \neq \varnothing$.

На множестве $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ определены функции $f_i(x)$ и $f_j(x)$. По построению существует $x_0 \in U_i \cap U_j \cap \gamma_0$. Поскольку множество $U_i \cap U_j$ линейно связно, то в нем существует путь (x_0, x). Следовательно, $f_i(x) = f_i(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \omega$, аналогично для $f_j(x)$. Поскольку $f_i(x_0) = f_j(x_0) = 0$, то $\forall x \in U_i \cap U_j \quad f_i(x) = f_j(x)$. Склеим из функций $f_i(x)$ функцию $f(x)$, определенную на U; функция $f(x)$ корректно определена. Пункт (1) леммы доказан.

Поскольку в окрестности U компактного особого слоя γ_0 слоение $\mathcal{F}_\omega$ определяется уровнями функции $f : U \to \mathbb{R}$ и слои являются связными компонентами поверхностей уровня функции f, то они компактны. Лемма 2.5 полностью доказана.

Замечание. Если γ_0' — компактное подмножество слоя γ_0 (возможно, некомпактного), то рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 2.5 можно показать, что в некоторой окрестности U множества γ_0' форма ω точна.

Пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно.

Теорема 2.1. *Для компактного многообразия M, обладающего компактным слоением морсовской формы, определено представление $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, где $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$ — замыкание максимальной окрестности неособого слоя γ_i, состоящей из диффеоморфных ему слоев.*

Доказательство. Рассмотрим неособый компактный слой γ и максимальную окрестность $\mathcal{O}(\gamma)$, состоящую из диффеоморфных ему слоев.

Если $\operatorname{Sing}\omega = \emptyset$, то, согласно лемме 2.4, $M = \mathcal{O}(\gamma) = V$ и утверждение теоремы выполнено.

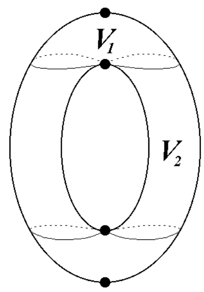
Пусть $\operatorname{Sing}\omega \neq \emptyset$. По лемме 2.4 множество $\mathcal{O}(\gamma)$ является цилиндром, причем, согласно лемме 2.3, край множества $V = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$ лежит в объединении особых слоев. Поскольку форма ω морсовская и многообразие M компактно, то особых точек конечное число. Следовательно, число различных цилиндров $\mathcal{O}(\gamma)$ тоже конечно, поскольку к каждой особой точке приклеивается не более четырех различных множеств $V = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$. Таким образом, многообразие M, на котором задано компактное слоение, представимо в виде:

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{O}(\gamma_i) \bigcup_{k=1}^{K} \gamma_k^0$$

где γ_k^0 — особые слои $\mathcal{F}_\omega$.

Пусть $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$. Согласно лемме 2.3 $\quad \partial V_i \subset \bigcup\limits_{k=1}^{K} \gamma_k^0$. С другой стороны, поскольку слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то согласно пункту (2) леммы 2.5 $\quad \gamma_k^0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} \partial V_i$. Следовательно, $\bigcup\limits_{k=1}^{K} \gamma_k^0 = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \partial V_i$ и $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, причем $V_i \cap V_j \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} \partial V_i$.

Итак, для компактного многообразия M, обладающего компактным слоением морсовской формы, определено представление $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, где $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$ — замыкание максимальной окрестности неособого слоя γ_i, состоящей из диффеоморфных ему слоев. Теорема 2.1 доказана.



2.2. Верхняя оценка степени иррациональности

Теорема 2.2. *Если слоение $\mathcal{F}_\omega$, определяемое на многообразии M морсовской формой ω, компактно, то* $\operatorname{dirr} \omega \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$.

Доказательство. Поскольку слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то согласно теореме 2.1 определено разбиение многообразия $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$.

Исследуем связь гомологий $H_1(M)$ и представления $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$.

Лемма 2.6. *Пусть M — связно, $V \subset M$ — замкнутое связное подмножество и $A = \overline{M \backslash V}$. Если число компонент связности $V \cap A$ есть p, число компонент связности A есть q, то*

$$H_1(M) = i_*(H_1(V) \oplus H_1(A)) \oplus \mathbb{Z}^{p-q}$$

где i_* индуцировано отображением $i = (i_1, i_2)$, $i_1 : V \to M$, $i_2 : A \to M$.

Доказательство. Поскольку $M = V \cup A$, то $H_1(M) = H_1(V \cup A)$. Рассмотрим точную последовательность Майера–Виеториса:

$$H_1(V) \oplus H_1(A) \xrightarrow{i_*} H_1(V \cup A) \xrightarrow{d_*} H_0(V \cap A) \xrightarrow{j_*} H_0(V) \oplus H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(V \cup A)$$

Поскольку $H_0(V \cap A) = \mathbb{Z}^p$ является свободной абелевой группой, то короткая точная последовательность

$$0 \to \ker d_* \to H_1(M) \to \operatorname{im} d_* \to 0$$

расщепляется и $H_1(M) = \ker d_* \oplus \operatorname{im} d_*$ и из последовательности Майера–Виеториса следует, что $H_1(M) = i_*(H_1(V) \oplus H_1(A)) \oplus \operatorname{im} d_*$. Из условий леммы имеем, что $H_0(A) = \mathbb{Z}^q$, $H_0(V \cup A) = \mathbb{Z}$ и последние члены последовательности Майера–Виеториса таковы:

$$\ldots \xrightarrow{d_*} \mathbb{Z}^p \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z}^{q+1} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}$$

Тогда $\ker i_* = \operatorname{im} j_* = \mathbb{Z}^q$ и $\ker j_* = \mathbb{Z}^{p-q}$. Следовательно, $\operatorname{im} d_* = \mathbb{Z}^{p-q}$. Лемма 2.6 доказана.

Замечание. Если множество V является замыканием цилиндра: $V = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$, то $q \leq p \leq 2$. Если при этом $A \neq \emptyset$, то $p \geq 1$ и $q \geq 1$. Следовательно, $0 \leq p - q \leq 1$. Тогда по лемме 2.6

$$H_1(M) = i_*(H_1(V) \oplus H_1(A)) \oplus < z >$$

где z — цикл, порождающий $\mathbb{Z}^{p-q}$. Если $\operatorname{im} d_* = 0$, то $z = 0$, если $\operatorname{im} d_* \neq 0$, то $d_* z \neq 0$.

Рассмотрим цикл z, порождающий $\mathbb{Z}^{p-q}$ в случае $p - q = 1$.

Лемма 2.7. *Если в условиях леммы 2.6 $V = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$ — замыкание цилиндра, $z \in H_1(V \cup A)$ причем $d_* z \neq 0$, то $z \circ [\gamma] \neq 0$.*

Доказательство. Предположим противное: $z \circ [\gamma] = 0$. Реализуем некоторый цикл kz, кратный z, замкнутой кривой α, $\alpha : [0,1] \to V \cup A$, $\alpha(0) = \alpha(1)$. Тогда $[\alpha] \circ [\gamma] = 0$.

Обозначим SV, SA — сингулярные комплексы пространств V и A; $S\{V, A\}$ — подкомплекс комплекса $S(V \cup A)$, порожденный комплексами SV и SA. Рассмотрим цикл $c \in S\{V, A\}$, реализующий kz, тогда $c = c_V + c_A$, где $c_V \in SV$ и $c_A \in SA$. Пусть носителем цепи c_V является $\alpha|_V$, то есть $|c_V| = \alpha|_V$. Если множество $\alpha|_V$ связно, то $c_V = (\sigma^1, \alpha \circ \varphi)$, где φ — замена координат, $\varphi' > 0$, $\alpha \circ \varphi : \sigma^1 \to \alpha|_V$. Поскольку α — замкнутая кривая, то число компонент связности $\alpha|_V$ конечно и тогда $c_V = \sum\limits_{i=1}^{s} (\sigma^1, \alpha \circ \varphi_i)$, где $\varphi_i' > 0$.

Класс $d_* z \in H_0(V \cap A)$ представляется циклом ∂c_V, при этом $| \partial c_V | = \alpha \cap \partial V$. Поскольку край множества V несвязен: $\partial V = \partial_1 V \cup \partial_2 V$, то $\partial c_V = c_1 + c_2$, где $| c_i | = \alpha \cap \partial_i V$.

Рассмотрим пересечение $\alpha \cap \partial_1 V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} p_i$, здесь p_i — точки. Поскольку V — замыкание цилиндра $\mathcal{O}(\gamma) \cong \gamma \times \mathbb{R}$, то $[\partial_1 V] = [\gamma]$ и $[\alpha] \circ [\partial_1 V] = [\alpha] \circ [\gamma] = 0$. С другой стороны, по определению, $[\alpha] \circ [\partial_1 V] = \sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V)$ — сумма локальных индексов пересечения, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V) = 0$.

Фиксируем в $V \cup A$ следующую ориентацию: выберем в $\partial_1 V$ ориентирующий репер и добавим к нему вектор, нормальный к

$\partial_1 V$ и направленный из V. Тогда, если в точке p_i кривая α выходит из V, то есть вектор $\dot\alpha$ направлен из V, то $\mathrm{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V) > 0$. Если же в точке p_i кривая α входит в V, то $\mathrm{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V) < 0$.

Поскольку $c_V = \sum\limits_{i=1}^{s}(\sigma^1, \alpha \circ \varphi_i)$, то

$$\partial c_V = \sum_{i=1}^{s}[(\sigma_2^0, \alpha \circ \varphi_{i2}) - (\sigma_1^0, \alpha \circ \varphi_{i1})] = \sum m_i p_i + \sum n_i q_i$$

где $\partial\sigma^1 = \sigma_2^0 - \sigma_1^0$, $c_1 = \sum m_i p_i$, $c_2 = \sum n_i q_i$, $m_i, n_i = \pm 1$. Покажем, что $m_i = \mathrm{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V)$. Действительно, если $m_i = 1$, то $p_i = |(\sigma_2^0, \alpha \circ \varphi_{i2})|$ и точка p_i является конечной точкой отрезка σ^1, следовательно, касательный вектор $\dot\alpha$ направлен из V и $\mathrm{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V) = 1$. Если же $m_i = -1$, то $p_i = |(\sigma_1^0, \alpha \circ \varphi_{i1})|$ и точка p_i является начальной точкой отрезка σ^1, следовательно, касательный вектор $\dot\alpha$ направлен в V и $\mathrm{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V) = -1$.

Итак, $m_i = \mathrm{ind}_{p_i}(\alpha \cdot \partial_1 V)$, следовательно, $\sum m_i = 0$ и цикл $c_1 = \sum m_i p_i$ гомологичен нулю: $c_1 \sim 0$. Аналогично доказывается, что $[\alpha] \circ [\partial_2 V] = 0$ влечет $c_2 \sim 0$, следовательно, $\partial c_V = c_1 + c_2 \sim 0$ в $V \cap A$, а поскольку $d_* z = [\partial c_V]$, то и $d_* z = 0$. Противоречие. Лемма 2.7 доказана.

Последовательно применяя леммы 2.6 и 2.7, вычислим группу гомологий $H_1(M)$, исходя из представления $M = \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_k$.

Лемма 2.8. *Пусть* $M = \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_k$, $i_k : V_k \to M$, *тогда*

$$H_1(M) = < i_{k*} H_1(V_k),\ z_k,\ k = 1, \ldots, N >$$

причем циклы z_k *характеризуются тем, что*

1). $z_k \circ [\gamma_i] = 0$ *при* $i < k$,

2). если $z_k \neq 0$, *то* $z_k \circ [\gamma_k] \neq 0$.

Доказательство. По условию $M = \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_k$. Рассмотрим множества V_1 и $A_1 = \bigcup\limits_{i>1} V_i$. Очевидно, что $V_1 \cup A_1 = M$ и по лемме 2.6 получим:

$$H_1(M) = i_*^{(1)}(H_1(V_1) \oplus H_1(A_1)) \oplus < z_1 >$$

где $i_*^{(1)}$ индуцируется вложениями $i_1^{(1)} : V_1 \to M$, $i_2^{(1)} : A_1 \to M$. Заметим, что $i_1^{(1)} = i_1$ и $H_1(M) =< i_{1*}H_1(V_1),\ z_1,\ i_{2*}^{(1)}H_1(A_1) >$. Обозначим $d_*^{(1)} : H_1(V_1 \cup A_1) \to H_0(V_1 \cap A_1)$, согласно замечанию к лемме 2.6, если $z_1 \neq 0$, то $d_*^{(1)} z_1 \neq 0$ и по лемме 2.7 $z_1 \circ [\gamma_1] \neq 0$.

Таким образом, на первом шаге мы выделили гомологии $H_1(V_1)$ и цикл z_1, удовлетворяющий условиям (1) и (2).

Вообще положим $A_0 = M$ и $A_k = \bigcup\limits_{i>k} V_i$, тогда $A_{k-1} = V_k \cup A_k$, соответствущие вложения $i_1^{(k)} : V_k \to A_{k-1}$, $i_2^{(k)} : A_k \to A_{k-1}$, отображение $d_*^{(k)} : H_1(A_{k-1}) \to H_0(V_k \cap A_k)$.

Будем последовательно применять лемму 2.6 к множествам $A_{k-1} = V_k \cup A_k$. Пусть

$$H_1(M) =< i_{s*}H_1(V_s),\ z_s,\ s = 1, \ldots, k-1,\ j_{(k-1)*}H_1(A_{k-1}) > \tag{2}$$

где $j_{k-1} : A_{k-1} \to M$.

Если множество A_{k-1} является связным, то согласно лемме 2.6:

$$H_1(A_{k-1}) = i_*^{(k)}(H_1(V_k) \oplus H_1(A_k)) \oplus < \tilde{z}_k > \tag{3}$$

Обозначим $z_k = j_{(k-1)*}\tilde{z}_k$. Поскольку, очевидно, $j_{(k-1)*}i_{1*}^{(k)} = i_{k*}$ и $j_{(k-1)*}i_{2*}^{(k)} = j_{k*}$, то из формул (2) и (3) получим

$$H_1(M) =< i_{1*}H_1(V_1), \ldots, i_{k*}H_1(V_k),\ \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_k,\ j_{k*}H_1(A_k) >$$

По построению $A_{k-1} \cap V_i = \emptyset$ для каждого $i < k$, следовательно, $z_k \circ [\gamma_i] = 0$, при $i < k$. Если $z_k \neq 0$, то $\tilde{z}_k \neq 0$ и $d_*^{(k)} \tilde{z}_k \neq 0$. Согласно лемме 2.7, $\tilde{z}_k \circ [i_1^{(k)} \gamma_k] \neq 0$, следовательно, $z_k \circ [\gamma_k] \neq 0$. Таким образом, цикл z_k удовлетворяет условиям (1) и (2) леммы.

Пусть теперь множество A_{k-1} несвязно: $A_{k-1} = A'_{k-1} \cup A''_{k-1}$, где A'_{k-1} — та компонента связности множества A_{k-1}, которая содержит V_k. Обозначим $\alpha_1 : A'_{k-1} \to A_{k-1}$, $\alpha_2 : A''_{k-1} \to A_{k-1}$. Поскольку $A'_{k-1} \cap A''_{k-1} = \emptyset$, то отображение α_* является изоморфизмом: $H_1(A_{k-1}) \simeq H_1(A'_{k-1}) \oplus H_1(A''_{k-1})$. Применим лемму 2.6 к связному множеству $A'_{k-1} = V_k \cup A'_k$. Обозначим ${i'}_1^{(k)} : V_k \to A'_{k-1}$, ${i'}_2^{(k)} : A'_k \to A'_{k-1}$, тогда

$$H_1(A'_{k-1}) = {i'}_*^{(k)}(H_1(V_k) \oplus H_1(A'_k)) \oplus < \tilde{z}_k >$$

Подставим это выражение в формулу

$$H_1(A_{k-1}) = \alpha_*(H_1(A'_{k-1}) \oplus H_1(A''_{k-1}))$$

Поскольку $A_k = A'_k \cup A''_{k-1}$, то $H_1(A_k) = \alpha_*({i'}_{2*}^{(k)} H_1(A'_k) \oplus H_1(A''_{k-1}))$. Следовательно, $j_{(k-1)*} H_1(A_{k-1}) =< i_{k*} H_1(V_k),\ z_k,\ j_{k*} H_1(A_k) >$, где $z_k = j_{(k-1)*} \alpha_{1*} \tilde{z}_k$. Подставив это выражение в формулу (2), получим, что $H_1(M) =< i_{s*} H_1(V_s),\ z_s,\ s \leq k,\ j_{k*} H_1(A_k) >$. Очевидно, цикл z_k удовлетворяет условиям (1) и (2) леммы.

Поскольку $M = \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_k$, то на последнем шаге получим, что $A_{N-1} = V_N$ и $H_1(M) =< i_{k*} H_1(V_k),\ z_k,\ k = 1, ..., N >$, причем все циклы z_k удовлетворяют условиям (1) и (2). Лемма 2.8 доказана.

Лемма 2.9. *Если* $z \in < i_{k*} H_1(V_k),\ k = 1, \ldots, N >$, *то*

1). $z \circ [\gamma_k] = 0$ *для всех* k,

2). $\int\limits_z \omega = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $V = V_k$, являющееся замыканием цилиндра. Пусть $V = \overline{\gamma \times (0,1)}$, очевидно, что $V = \gamma \times [0,1]/R$, где R — отношение эквивалентности, определенное на множестве $\gamma \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}$. Возможны следующие случаи:

а). Если каждое из оснований цилиндра, $\gamma \times \{0\}$ и $\gamma \times \{1\}$, склеивается в точку, то $V = \Sigma\gamma$ — надстройка над γ, $\partial V = \emptyset$. При этом $H_1(V, \partial V) = H_1(\Sigma\gamma) = 0$.

б). Если одно из оснований цилиндра $\gamma \times [0,1]$, например, $\gamma \times \{0\}$, склеивается в точку, то $V = C\gamma/R_1$, где $C\gamma$ —конус над γ, R_1 — отношение эквивалентности на множестве $\gamma \times \{1\}$. Заметим, что $\partial V \neq \emptyset$, край имеет одну компоненту связности: $|\partial V| = 1$. Поскольку $V/\partial V = \Sigma\gamma$,то $H_1(V, \partial V) = 0$.

в). Если ни одно из оснований цилиндра не склеивается в точку, то без ограничения общности можно считать, что множество ∂V имеет две компоненты связности. Действительно, если отношение R отождествляет точку $x \in \gamma \times \{0\}$ и точку $y \in \gamma \times \{1\}$, то $|\partial V| = 1$. В таком случае рассмотрим разбиение $V = V' \cup V''$, где $V' = \overline{\gamma \times (0, \frac{1}{2})}$, $V'' = \overline{\gamma \times (\frac{1}{2}, 1)}$. При этом $V' = \gamma \times [0, \frac{1}{2}]/R'$, где $R' = R$ на множестве $\gamma \times \{0\}$ и $R' = id$ на множестве $\gamma \times (\frac{1}{2}, 1)$. Очевидно, что $|\partial V'| = 2$, и, аналогично, $|\partial V''| = 2$.

Поскольку $|\partial V| = 2$, то множество $V/\partial V$ представляет собой надстройку над γ, у которой отождествлены вершины. Очевидно, что $H_1(V, \partial V) = \mathbb{Z}$.

Рассмотрим точную последовательность пары:

$$\to H_1(\partial V) \xrightarrow{\alpha_{1*}} H_1(V) \xrightarrow{\beta} H_1(V, \partial V) \xrightarrow{\partial} H_0(\partial V) \xrightarrow{\alpha_{0*}} H_0(V) \to$$

Покажем, что отображение α_{1*} сюръективно.

Как было показано выше, в случаях (а) и (б) $H_1(V, \partial V) = 0$, следовательно, $\operatorname{im}\beta = 0$ и $\operatorname{im}\alpha_{1*} = \ker\beta = H_1(V)$.

Рассмотрим случай (в): $H_1(V, \partial V) = \mathbb{Z}$, $H_0(\partial V) = \mathbb{Z}^2$. Поскольку множество V связно, то $H_0(V) = \mathbb{Z}$, следовательно, $\ker\alpha_{0*} \neq 0$ и $\operatorname{im}\partial = \mathbb{Z}$. Тогда $\operatorname{im}\beta = \ker\partial = 0$ и, соответственно, $\operatorname{im}\alpha_{1*} = \ker\beta = H_1(V)$.

Итак, $\forall z' \in H_1(V) \quad \exists z'' \in H_1(\partial V) \quad z' = \alpha_{1*}z''$.

Рассмотрим цикл $z \in H_1(M) =< i_{k*}H_1(V_k),\ z_k,\ k = 1, \ldots, N >$, тогда $z = \sum n_k z_k$, где $z_k = i_{k*}z'_k$, $z'_k \in H_1(V_k)$. Как было показано выше, $z'_k = \alpha^{(k)}_{1*} z''_k$, $z''_k \in H_1(\partial V_k)$. Поскольку $\partial V_k \cap \gamma_i = \emptyset \quad \forall i$, то $z_k \circ [\gamma_i] = 0$, следовательно, $z \circ [\gamma_i] = 0$.

Поскольку $\int\limits_{z_k} \omega = \int\limits_{z''_k} \alpha_1^{(k)*} i_k^* \omega$, где $i_k \circ \alpha_1^{(k)} : \partial V_k \to M$, и согласно лемме ??? множество ∂V_k лежит в слое (или объединении двух слоев), то $\omega|_{\partial V_k} = 0$ и $\int\limits_{z_k} \omega = 0$. Следовательно, $\int\limits_{z} \omega = \sum n_k \int\limits_{z_k} \omega = 0$. Лемма 2.9 доказана.

Вернемся к вопросу о вычислении группы $H_1(M)$.

Лемма 2.10. *Пусть* $S =< i_{k*}H_1(V_k), k = 1, \ldots, N >$. *Тогда*

$$H_1(M) =< S,\ D[\gamma_k],\ k = 1, \ldots, N >$$

где $D : H_{n-1}(M) \to H_1(M)$ *— отображение двойственности Пуанкаре.*

Доказательство. Обозначим $H =< S,\ D[\gamma_k],\ k = 1, ..., N >$, $H \subseteq H_1(M)$. Согласно пункту (1) леммы 2.9, для всякого $z \in S$ $z \circ [\gamma_k] = 0$, $k = 1, \ldots, N$. Следовательно, поскольку $D[\gamma_k] \circ [\gamma_k] \neq 0$, то $D[\gamma_k] \notin S$ и $H = S \oplus < D[\gamma_1], \ldots, D[\gamma_N] >$.

Согласно лемме 2.8, $H_1(M) =< S,\ z_1, \dots, z_N >$, причем $\forall z_k \neq 0$ $z_k \circ [\gamma_k] \neq 0$. Рассмотрим все циклы $z_{k_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, m$, тогда $z_{k_i} \notin S$ и $H_1(M) =< S, z_{k_1}, \dots, z_{k_m} >= S\oplus < z_{k_1}, \dots, z_{k_m} >$.

Рассмотрим матрицу пересечений $A_{ij} = z_{k_i} \circ [\gamma_{k_j}]$, $i, j = 1, \dots, m$. Согласно лемме 2.8, матрица имеет треугольный вид, причем $A_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & A_{ij} \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{mm} \end{pmatrix}$$

Таким образом, система $z_{k_1}, ..., z_{k_m}$ независима, кроме того, независимой является система $[\gamma_{k_1}], ..., [\gamma_{k_m}]$ и, соответственно, $D[\gamma_{k_1}], ..., D[\gamma_{k_m}]$.

Поскольку $S\oplus < D[\gamma_{k_1}], \dots, D[\gamma_{k_m}] >\subseteq H$, то $\mathrm{rk}\, S + m \leq \mathrm{rk}\, H$. С другой стороны, $H \subseteq S\oplus < z_{k_1}, \dots, z_{k_m} >= H_1(M)$, следовательно, $\mathrm{rk}\, H \leq \mathrm{rk}\, S + m = \mathrm{rk}\, H_1(M)$. Таким образом, $\mathrm{rk}\, H = \mathrm{rk}\, S + m = \mathrm{rk}\, H_1(M)$ и $H = H_1(M)$. Лемма 2.10 доказана.

Вычислим периоды формы ω. Согласно лемме 2.10, достаточно рассмотреть интегралы по циклам $z \in S$ и $z = D[\gamma_i]$. Из пункта (2) леммы 2.9 следует, что $\forall z \in S \quad \int\limits_z \omega = 0$.

Следовательно, на многообразии M могут быть отличны от нуля только интегралы по циклам $z_i = D[\gamma_i]$, $i = 1, .., N$, которые трансверсальны слоям γ_i. При этом, число интегралов $\int\limits_{z_i} \omega$, независимых над $\mathbb{Q}$, очевидно, не превосходит числа независимых классов $[\gamma_i]$, то есть rkH_ω.

Таким образом, на многообразии M

$$\operatorname{dirr}\omega = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}\left\{\int\limits_{z_1}\omega, ..., \int\limits_{z_k}\omega\right\} - 1$$

где $k = \operatorname{rk} H_\omega$. Следовательно, $\operatorname{dirr}\omega \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$. Теорема 2.2 доказана.

В следующем пункте будет доказана точность полученной оценки.

2.3. Некоторые следствия

2.3.1. Признак существования некомпактного слоя

Следствие 2.1. *Если на многообразии M слоение $\mathcal{F}_\omega$ определяется морсовской формой ω и $\operatorname{dirr}\omega \geq h_0^{max}(M)$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ имеет некомпактный слой.*

Доказательство. Предположим противное: все слои $\mathcal{F}_\omega$ компактны. Тогда по теореме 2.2 $\operatorname{dirr}\omega \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$, а поскольку $\operatorname{rk} H_\omega \leq h_0^{max}(M)$, то $\operatorname{dirr}\omega \leq h_0^{max}(M) - 1$. Противоречие. Следствие 2.1 доказано.

Рассмотрим приложения следствия 2.1 к конкретным многообразиям. В примере 1.2 было показано, что $h_0(M_g^2) = g$, и тогда теорема 1.3 непосредственно вытекает из доказанного следствия.

Рассмотрим слоение на торе T^n. Справедлив следующий критерий.

Следствие 2.2. *Слоение $\mathcal{F}_\omega$ на торе T^n, определяемое морсовской 1–формой ω , компактно в том и только в том случае, когда* $\operatorname{dirr}\omega \leq 0$.

Доказательство. Если $\operatorname{dirr}\omega \leq 0$, то слоение ком- пактно в силу [21]. Обратно, пусть $\mathcal{F}_\omega$ компактно. Тогда, согласно следствию 2.1, $\operatorname{dirr}\omega \leq h_0(T^n) - 1$. В примере 1.1 было показано, что $h_0(T^n) = 1$, следовательно, $\operatorname{dirr}\omega \leq 0$. Следствие доказано.

Таким образом, если на торе T^n $\operatorname{dirr}\omega \geq 1$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ некомпактно и, в силу теоремы 1.1, $\operatorname{rk} H_\omega = 0$, то есть всякий компактный слой гомологичен нулю.

2.3.2. Точность верхней оценки

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{F}_\omega$ — компактное слоение, определяемое морсовской формой ω. Тогда, для любого целого p такого, что $0 \leq p \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$, существует замкнутая морсовская форма ω' со степенью иррациональности $\operatorname{dirr}\omega' = p$, определяющая то же самое слоение $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}_\omega$.*

Доказательство. Из лемм 2.8 и 2.9 непосредственно следует, что $\operatorname{dirr}\omega = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}\left\{\int\limits_{z_1}\omega, ..., \int\limits_{z_m}\omega\right\} - 1$, где циклы $z_i \neq 0$ независимы и матрица пересечений $z_i \circ [\gamma_j]$, $i, j \leq m$ является верхнетреугольной. Построение циклов z_i связано со структурой слоения $\mathcal{F}_\omega$ и определяется леммой 2.8. Из доказательства леммы 2.10 следует, что $m = \operatorname{rk} H_\omega$.

Реализуем циклы z_i (или кратные им циклы) кривыми α_i. Как следует из построения циклов z_i, для $i > j$ $\alpha_i \cap \gamma_j = \emptyset$. Обозначим $n_{ij} = [\alpha_i] \circ [\gamma_j]$, тогда $n_{ij} = 0$ для $i > j$ и $n_{ii} \neq 0$.

Каждому слою γ_i, $i \leq m$ сопоставим замкнутую цилиндрическую окрестность $W_i = \gamma_i \times I$, содержащуюся в множестве $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$ и такую, что $\alpha_i \cap W_j = \emptyset$ для $i > j$. Согласно лемме 2.5, в окрестности W_i форма ω точна и слои являются поверхностями уровня функции.

Определим на многообразии M гладкие функции $f_i(x)$, $i \leq m$ такие, что функция $f_i(x)$ равна 1 на множестве $M \setminus \operatorname{Int} W_i$, а в окрестности W_i постоянна на слоях и отлична от нуля. Рассмотрим функцию $f(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_m(x)$. Очевидно, форма $\omega' = f(x)\omega$ определяет то же слоение, что и ω, причем $d\omega' = 0$. Покажем, что выбором функций $f_i(x)$ можно построить форму ω' произвольной степени иррациональности p, меньшей m.

Поскольку $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}_{\omega}$, то из лемм 2.8 и 2.9 непосредственно следует, что $\operatorname{dirr} \omega' = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}} \left\{ \int\limits_{\alpha_1} \omega, \ldots, \int\limits_{\alpha_m} \omega \right\} - 1$.

Рассмотрим $\int\limits_{\alpha_m} \omega'$. Обозначим $J_m = \overline{\alpha_m \setminus (\alpha_m \cap W_m)}$, тогда

$$\int\limits_{\alpha_m} \omega' = \int\limits_{\alpha_m \cap W_m} \omega' + \int\limits_{J_m} \omega'$$

Поскольку $\operatorname{Int} J_m \cap W_i = \emptyset \ \ \forall i$, то $\int\limits_{J_m} \omega' = \int\limits_{J_m} \omega$ — известная величина. Очевидно, что $\int\limits_{\alpha_m \cap W_m} \omega' = n_{mm} \int\limits_{I_m} f_m(x)\omega$, где $I_m \subset W_m$ — отрезок, трансверсальный слоям, концы которого принадлежат ∂W_m. Поскольку $n_{mm} \neq 0$, то выбором функции $f_m(x)$ можно добиться произвольного значения $\int\limits_{\alpha_m} \omega'$, близкого к $\int\limits_{\alpha_m} \omega$. Фиксируем функцию $f_m(x)$, можно выбрать $f_m(x) \equiv 1$.

Предположим, построены функции $f_{k+1}(x), \ldots, f_m(x)$ и, соответственно, вычислены значения $\int\limits_{\alpha_{k+1}} \omega', \ldots, \int\limits_{\alpha_m} \omega'$. Определим функцию $f_k(x)$ и значение $\int\limits_{\alpha_k} \omega'$. Обозначим $J_k = \overline{\alpha_k \setminus \bigcup\limits_{i \geq k} (\alpha_k \cap W_i)}$, тогда

$$\int\limits_{\alpha_k} \omega' = \int\limits_{\alpha_k \cap W_k} \omega' + \sum_{i>k} \int\limits_{\alpha_k \cap W_i} \omega' + \int\limits_{J_k} \omega'$$

Поскольку $\operatorname{Int} J_k \cap W_i = \emptyset \ \forall i > k$, то $\int\limits_{J_k} \omega' = \int\limits_{J_k} \omega$, следовательно, третье слагаемое — известная величина.

Очевидно, что $\int\limits_{\alpha_k \cap W_i} \omega' = n_{ki} \int\limits_{I_i} f_i(x)\omega$, где $I_i \subset W_i$ — отрезок, трансверсальный слоям, концы которого принадлежат ∂W_i. Поскольку, по предположению, функции $f_{k+1}(x), \ldots, f_m(x)$ уже построены, то второе слагаемое тоже является известной величиной.

Так как $\int\limits_{\alpha_k \cap W_k} \omega' = n_{kk} \int\limits_{I_k} f_k(x)\omega$ и $n_{kk} \neq 0$, то выбором функции $f_k(x)$ можно добиться произвольного значения $\int\limits_{\alpha_k} \omega'$, близкого к $\int\limits_{\alpha_k} \omega$. Если $k < p$, то выберем функцию $f_k(x)$ таким образом, чтобы значение $\int\limits_{\alpha_k} \omega'$ было несоизмеримым со значениями уже построенных интегралов $\int\limits_{\alpha_i} \omega'$, $\ i > k$. Если же $k \geq p$, то выберем такую функцию $f_k(x)$, чтобы значение $\int\limits_{\alpha_k} \omega'$ оказалось соизмеримым. Теорема 2.3 доказана.

Следствие 2.3. *Оценка на степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение, которая была получена в теореме 2.2, является точной в следующем смысле: существует форма ω' такая, что $\operatorname{dirr} \omega' = \operatorname{rk} H_{\omega'} - 1$ и $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}_\omega$.*

Это утверждение непосредственно следует из доказанной теоремы.

2.3.3. Критерий компактности слоения

Следствие 2.4. *Слоение $\mathcal{F}_\omega$, определяемое морсовской формой, компактно в том и только том случае, когда существует функция $f : M \to \mathbb{R} \backslash 0$ такая, что $df \wedge \omega = 0$ и $\operatorname{dirr}(f(x)\omega) = 0$.*

Доказательство. Если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то из доказательства теоремы 2.3 следует, что существует функция $f(x)$, постоянная на слоях и удовлетворяющая условию $\operatorname{dirr}(f(x)\omega) = 0$. Обратное утверждение следует из того, что для $f(x) \neq 0$ слоения форм ω и $f(x)\omega$ совпадают.

2.3.4. Некомпактность слоения морсовской формы общего положения

Рассмотрим морсовские формы общего положения.

Теорема 2.4. *Если на многообразии M пересечение $(n-1)$–мерных гомологических классов не тождественно нулевое, то слоение формы общего положения имеет некомпактный слой. В двумерном случае, кроме того, всякий компактный слой формы общего положения гомологичен нулю.*

Доказательство. Поскольку пересечение гомологических классов не тождественно нулевое, то $h_0(M) < \beta_1(M)$. Форма общего положения имеет максимальную степень иррациональности $\operatorname{dirr}\omega = \beta_1(M) - 1$. Следовательно, $\operatorname{dirr}\omega \geq h_0(M)$ и согласно следствию 2.1 слоение $\mathcal{F}_\omega$ имеет некомпактный слой.

Рассмотрим двумерный случай. Предположим, существует компактный слой $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$. Тогда $[\gamma] = \sum\limits_{i=1}^{2g} n_i z_i$, где $z_1, ..., z_{2g}$ —

базис циклов в $H_1(M)$. Очевидно, что $\int\limits_\gamma \omega = 0$, с другой стороны, $\int\limits_\gamma \omega = \sum\limits_{i=1}^{2g} n_i \int\limits_{z_i} \omega = 0$, а, поскольку периоды формы общего положения несоизмеримы, то для всех $i = 1, ..., 2g$ $n_i = 0$ и $[\gamma] = 0$. Следствие доказано.

Заметим, что если на многообразии M пересечение $(n-1)$–мерных гомологических классов тождественно нулевое, то слоение формы общего положения может оказаться компактным.

Например, если $\beta_1(M) = 1$, то пересечение $(n-1)$–мерных гомологических классов, очевидно, нулевое, при этом максимальная степень иррациональности формы $\operatorname{dirr} \omega = 0$. Следовательно, на таком многообразии всякое слоение, определяемое морсовской формой, компактно.

3. Особые точки морсовской формы

3.1. Особые точки слоений морсовской формы

Рассмотрим множество $\operatorname{Sing}\omega$, состоящее из особых точек морсовской формы ω.

Очевидно, что $\forall k \in \mathbb{R}\backslash 0$ форма $k\omega$ определяет то же слоение: $\mathcal{F}_{k\omega} = \mathcal{F}_{\omega}$, при этом $\operatorname{Sing} k\omega = \operatorname{Sing}\omega$. Следовательно, с точки зрения слоения имеет смысл не различать индексы особых точек форм ω и $k\omega$.

Скажем, если локально, в окрестности особой точки p, $\omega = df$ и индекс особой точки равен λ , то относительно функции $-f$, которая определяет то же слоение в этой окрестности, индекс особой точки p равен $n-\lambda$. Поэтому для индекса особой точки морсовской формы удобно следующее определение.

Определение 3.1. *Пусть p — особая точка морсовской формы ω и $x^1, ..., x^n$ — координаты в окрестности p такие, что*

$$\omega = \sum_{i=1}^{\lambda} x^i dx^i - \sum_{i=\lambda+1}^{n} x^i dx^i$$

Индексом $\operatorname{ind} p$ *особой точки p называется число* $\min(\lambda, n-\lambda)$ [28].

Обозначим Ω_i — множество особых точек индекса i, очевидно, $\operatorname{Sing}\omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_k$, где $k = [\frac{n}{2}]$.

Рассмотрим, как устроено слоение $\mathcal{F}_{\omega}$ в окрестности особой точки $p \in M^n$.

Поскольку локально $\omega = df$, где f — функция Морса, то в окрестности особой точки, в некоторых координатах $x^1, ..., x^n$ таких, что $x^i(p) = 0$, функция f представима в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2 - \sum_{i=\lambda+1}^{n} (x^i)^2$$

и слои $\mathcal{F}_\omega$ локально задаются уравнением $f(x) = \varepsilon$.

Если $\operatorname{ind} p = 0$, то некоторая окрестность p слоится на сферы: $\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = \varepsilon$. Как следует из определения 1.2, особая точка индекса 0 является особым слоем.

Если $\operatorname{ind} p = 1$, то в окрестности точки p слоение задается уравнением $(x_1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (x^i)^2 = \varepsilon$. Особый слой, содержащий точку p, локально является конусом с вершиной в точке p. Для малого $\varepsilon > 0$ локально в окрестности точки p поверхность уровня f_ε (или $f_{-\varepsilon}$) функции f является двуполостным гиперболоидом и имеет локально две компоненты связности.

Если $\operatorname{ind} p > 1$, то все поверхности уровня функции f в окрестности точки p локально линейно связны. Следовательно, на таких особых точках происходят внутренние перестройки слоя.

3.2. Число особых точек индекса 1, лежащих на особом слое

3.2.1. Теорема о числе особых точек индекса 1

В лемме 2.1 было показано, что каждый неособый компактный слой γ обладает окрестностью, состоящей из диффеоморфных ему слоев. Максимальную такую окрестность обозначим $\mathcal{O}(\gamma)$.

Край множества $V = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$ имеет не более двух компонент связности. Как было показано в лемме 2.3, каждая компонента связности края $\partial V = \partial_1 V \cup \partial_2 V$ лежит в некотором особом слое. Будем говорить, что множество V приклеивается к особому слою γ_0, если $\partial_1 V \subset \gamma_0$ или $\partial_2 V \subset \gamma_0$.

Пусть γ_0 — особый слой, к которому приклеиваются множества V_i. Разобьем множества V_i на группы; группу составляет максимальное число множеств V_i, для которых $(\cup \partial V_i) \cap \gamma_0$ связно.

Если к особой точке $p \in \gamma_0$ приклеивается два множества V_i, то есть $p \in V_1 \cap V_2$, где $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$, то, очевидно, $p \in \Omega_1$. Следовательно, группе множеств V_i соответствует некоторое число точек $p \in \Omega_1 \cap \gamma_0$, оценим это число.

Теорема 3.1. *Пусть к особому слою γ_0 приклеивается группа из m множеств V_i, тогда*

1). если γ_0 — компактный слой, то $|\Omega_1 \cap \gamma_0| \geq m - 2$,

2). если γ_0 — некомпактный слой, то $|\Omega_1 \cap \gamma_0| \geq m$.

Доказательство. Обозначим $d = (\cup \partial V_i) \cap \gamma_0$, по условию множество d является связным, $d \subset \gamma_0$. Очевидно, что $|\Omega_1 \cap \gamma_0| \geq |\Omega_1 \cap d|$.

Лемма 3.1. *Особый слой γ_0 компактен тогда и только тогда, когда $d = \gamma_0$.*

Доказательство. Множество $d = (\cup \partial V_i) \cap \gamma_0$ является компактным, поскольку каждое множество $\partial_k V_i \subset \gamma_0$ компактно и их число конечно. Если $d = \gamma_0$, то, очевидно, слой γ_0 также компактен.

Обратно, пусть слой γ_0 компактен. Рассмотрим точку $x \in \gamma_0$. Согласно лемме 2.5, в некоторой окрестности U слоя γ_0 форма точна. Окрестность U можно выбрать таким образом, что $\operatorname{Sing}\omega \cap U = \operatorname{Sing}\omega \cap \gamma_0$. Слои $\mathcal{F}_\omega$ в окрестности U являются уровнями функции f. Следовательно, $\forall \mathcal{O}(x) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad f_\varepsilon \cap \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$. Глобально множество $f_\varepsilon \cap \mathcal{O}(x)$ содержится в неособом компактном слое γ. Согласно лемме 2.1, слой γ обладает (максимальной) окрестностью $\mathcal{O}(\gamma)$, состоящей из диффеоморфных ему слоев. Компонента связности края множества $V_x = \overline{\mathcal{O}(\gamma)}$, по лемме 2.3, содержится в особом слое γ_0. Следовательно, $\forall \mathcal{O}(x) \;\; \mathcal{O}(x) \cap V_x \neq \emptyset$ и $x \in \partial V_x$.

Таким образом, для каждой точки $x \in \gamma_0$ существует множество V_x, содержащее x. Множества V_x образуют группу, поскольку множество $d = (\bigcup\limits_{x \in \gamma_0} V_x) \cap \gamma_0 = \gamma_0$, следовательно, связно. Таким образом, $\forall x \in \gamma_0 \;\; x \in d$, соответственно, $d = \gamma_0$. Лемма 3.1 доказана.

Рассмотрим слоение $\mathcal{F}_\omega$ в некоторой окрестности множества d. Каждой особой точке $p \in \Omega_1 \cap d$ сопоставим функцию f_p, которая локально определяет слоение $\mathcal{F}_\omega$ в окрестности $\mathcal{O}(p)$ точки p. Окрестность $\mathcal{O}(p)$ выберем таким образом, что $\mathcal{O}(p) \cap \operatorname{Sing}\omega = p$. Положим $f_p(p) = 0$, тогда поверхности уровня $f_p^{-1}(0)$ локально определяют особый слой γ_0. Очевидно, $f_p^{-1}(0) \cap d \neq \emptyset$. Поверхность уровня $f_p^{-1}(0)$ локально представляет собой конус, следовательно, $\partial \overline{f_p^{-1}(0)} \neq \emptyset$ и имеет две компоненты связности, если $\dim M \geq 3$, либо четыре компоненты связности, если $\dim M = 2$. По крайней мере, одна из этих компонент связности лежит в d, поскольку $p \in d$.

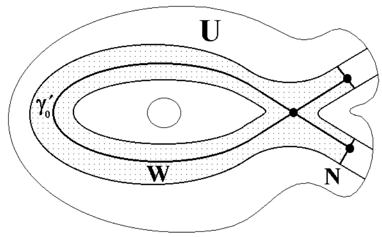
Обозначим $\gamma_0' = d \bigcup\limits_{p \in \Omega_1 \cap d} \overline{f_p^{-1}(0)}$, множество $\gamma_0' \subset \gamma_0$, очевидно, является компактным. Согласно лемме 2.5, в некоторой окрестности U множества γ_0' форма точна, $\omega = df$, и слоение $\mathcal{F}_\omega$ определяется поверхностями уровня функции $f : U \to \mathbb{R}$.

Если слой γ_0 компактен, то, согласно лемме 3.1, $d = \gamma_0$, следовательно, $\gamma_0' = \gamma_0$.

В окрестности U компактного особого слоя γ_0 слоение $\mathcal{F}_\omega$ определяется уровнями функции $f : U \to \mathbb{R}$. Слои являются связными компонентами поверхностей уровня функции f, в частности, компактны. Таким образом, в некоторой окрестности компактного особого слоя близкие неособые слои также являются компактными. Положим $f|_{\gamma_0} = 0$, тогда $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset f(U)$ и $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] \subset U$. Обозначим замкнутое множество $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ через W, $\partial W = f_{-\varepsilon} \cup f_{+\varepsilon}$. Заметим, что для достаточно малого ε множество $W = f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ не содержит других особых слоев. Уровни $f_{-\varepsilon}$, $f_{+\varepsilon}$, очевидно, гомологичны.

Пусть $f_{+\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \gamma_{i+}$ и $f_{-\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \gamma_{i-}$, где γ_{i+}, γ_{i-} — неособые компактные слои. Очевидно, что $k + s \geq m$.

Если γ_0 — некомпактный особый слой, то $\gamma_0' \neq d$. Действительно, согласно лемме 3.1, $d \neq \gamma_0$. Пусть $x \in d$, $x' \in \gamma_0 \backslash d$, поскольку слой γ_0 связен, существует путь $\alpha \subset \gamma_0$, соединяющий эти точки. Очевидно, $\alpha \cap d \neq \emptyset$ и $\alpha \cap (\gamma_0 \backslash d) \neq \emptyset$. Поскольку путь α связен и множество d замкнуто, то существует точка $x_0 \in \alpha \cap d$ такая, что $\forall \mathcal{O}(x_0) \subset \gamma_0 \quad \mathcal{O}(x_0) \cap (\gamma_0 \backslash d) \neq \emptyset$. Рассмотрим $U(x_0)$ — окрестность точки x_0, лежащую в M. Тогда $U(x_0) \cap \gamma_0 = \mathcal{O}(x_0)$, следовательно, $U(x_0) \cap d \neq \emptyset$ и в окрестности $U(x_0)$ лежат подмножества компактных слоев. С другой стороны, $U(x_0) \cap (\gamma_0 \backslash d) \neq \emptyset$ и в окрестности $U(x_0)$ содержатся подмножества некомпактных слоев. Таким образом, $x_0 \in \Omega_1$, следовательно, $\gamma_0' \neq d$.



В окрестности U множества γ_0' слоение $\mathcal{F}_\omega$ определяется уровнями функции $f : U \to \mathbb{R}$. Слои являются связными компонентами поверхностей уровня функции f. Положим $f|_{\gamma_0} = 0$, тогда $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset f(U)$ и $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] \subset U$.

Поскольку $\gamma_0' \neq d$, то $\partial\gamma_0' \neq \emptyset$. Обозначим N_0 компоненту связности множества $\partial\gamma_0'$. На множестве $\partial\gamma_0'$ форма ω неособа, следовательно, в окрестности этого множества определено векторное поле ξ такое что $\omega(\xi) = 1$. Поскольку локально $\omega = df$, в качестве поля ξ можно выбрать градиенто-подобное векторное поле $\xi^i = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|^2}\, g^{ij}\, \partial_j f$, где g^{ij} — метрика. Векторное поле ξ определяет фазовый поток $g^t : N_0 \to N_t$, причем, поскольку $\omega(\xi) = 1$, диффеоморфизмы g^t переводят слой в слой и $N_t \subset f_t$.

Обозначим $N = \bigcup\limits_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} N_t$. Очевидно, что $N \simeq [-\varepsilon, \varepsilon] \times N_0$. Множество N делит окрестность $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ на две части: $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] = A_1 \cup A_2$, причем $N = \partial A_i$ и множество γ_0' лежит в замыкании одного из множеств A_i.

Пусть $\partial\gamma_0' = N_{01} \cup \ldots \cup N_{0l}$. Каждой компоненте связности N_{0i} сопоставим множество $N_i = \bigcup\limits_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} N_{ti}$, где $N_{ti} = g^t N_{0i}$. При достаточно малом ε, $N_i \cap N_j = \emptyset$. Каждое множество N_i делит окрестность $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ на две части A_i, следовательно, l множеств N_i делит $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ на $l + 1$ частей A_i. Множество γ_0' принадлежит замыканию одной из этих частей, например, A_1: $\gamma_0' \subset \overline{A_1}$. Обозначим $W = \overline{A_1}$.

Рассмотрим $W \subset f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ и ограничение поверхностей уровня функции f на множество W. Пусть $f_{+\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \gamma_{i+} \bigcup\limits_{i=1}^{k'} \gamma'_{i+}$ и $f_{-\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \gamma_{i-} \bigcup\limits_{i=1}^{s'} \gamma'_{i-}$, где γ_{i+}, γ_{i-} — неособые компактные слои, γ'_{i+}, γ'_{i-} — компоненты связности поверхностей уровня, имеющие край. Очевидно, что $k + s \geq m$, $k' + s' \geq 2$.

Пусть $\dim M \geq 3$. Обозначим $P_+ \subset \Omega_1 \cap d$ множество особых точек, в окрестности которых поверхность уровня $f_{+\varepsilon}$ имеет локально две компоненты связности. Каждая из этих компонент связности глобально является слоем $\gamma_i^{(p)}$, лежащим на поверхности уровня $f_{+\varepsilon}$. Возможен случай, когда $\gamma_1^{(p)} = \gamma_2^{(p)}$. Таким образом, особой точке $p \in P_+$ соответствует один или два слоя, лежащих на поверхности уровня $f_{+\varepsilon}$.

Построим граф G_+ следующим образом: точке $p \in P_+$ сопоставим ребро графа, слоям $\gamma_i^{(p)}$ — вершины графа. Если слой γ_0 компактен, то вершинами являются компактные слои, которым соответствуют множества V_i, если γ_0 некомпактен, то кроме компактных слоев вершинами являются компоненты, имеющие край. Ребро p инцидентно вершинам $\gamma_1^{(p)}$ и $\gamma_2^{(p)}$. Если $\gamma_1^{(p)} = \gamma_2^{(p)}$, ребро p является петлей. Граф G_+ имеет $|P_+|$ ребер, k вершин, которым соответствуют компактные слои и k' вершин, которым соответсвуют компоненты, имеющие край. Граф G_+ является связным, поскольку особый слой γ_0 связен. По теореме 4.5 [25] для связных графов $|P_+| - (k + k') + 1 \geq 0$.

Обозначим $P_- \subset \Omega_1 \cap d$ множество особых точек, в окрестности которых поверхность уровня $f_{-\varepsilon}$ имеет локально две компоненты связности. Аналогичным образом построим граф G_- и получим неравенство $|P_-| - (s + s') + 1 \geq 0$, где $s + s'$ — число вершин.

Поскольку $\dim M \geq 3$, то в окрестности особой точки $p \in \Omega_1 \cap d$ поверхности уровня функции f локально являются двуполостным и однополостным гиперболоидом, следовательно, $P_+ \cap P_- = \emptyset$. Поскольку $\Omega_1 \cap d = P_+ \cup P_-$, то $|\Omega_1 \cap d| = |P_+| + |P_-| \geq (k+s) + (k'+s') - 2$.

Если γ_0 — компактный слой, то вершинами графа являются компактные слои, их число $k+s \geq m$, $k' = s' = 0$. Следовательно, $|\Omega_1 \cap d| \geq m-2$.

Если γ_0 — некомпактный слой, то вершинами графа являются компактные слои, их число $k+s \geq m$, и компоненты, имеющие край, их не меньше 2: $k'+s' \geq 2$. Следовательно, $|\Omega_1 \cap d| \geq m$.

Поскольку $|\Omega_1 \cap \gamma_0| \geq |\Omega_1 \cap d|$, в случае $\dim M \neq 2$ теорема 3.1 доказана.

Пусть теперь $\dim M = 2$. В этом случае слои одномерны и множество γ_0' представляет собой граф G с конечным числом вершин, особым точкам соответствуют вершины, имеющие степень 4, компонентам связности края $\partial\gamma_0'$ соответствуют вершины степени 1. Добавим вершины степени 2, поместив дополнительную точку в середину каждого ребра. Обозначим n_i число вершин степени i.

Разбиениям поверхностей уровня $f_{+\varepsilon}$ и $f_{-\varepsilon}$ на слои соответствуют два различных разбиения графа G на циклы и цепи: компактному слою γ_{i+} (или γ_{i-}) соответствует компонента связности края $\partial\overline{\mathcal{O}(\gamma_{i+})}$ (соответственно, $\partial\overline{\mathcal{O}(\gamma_{i-})}$), лежащая в γ_0; компонентам связности поверхностей уровня, имеющим край, соответствует цепь в графе G. Причем, как следует из локальной структуры поверхностей уровня в окрестности особых точек, в вершинах степени 4 никакие два ребра графа G не смежны одновременно в обоих разбиениях.

Пусть разбиению поверхности уровня $f_{+\varepsilon}$ на слои соответствует разбиение графа G, содержащее k циклов, разбиению поверхности уровня $f_{-\varepsilon}$ на слои соответствует разбиение графа, содержащее s циклов.

Если слой γ_0 компактен, то согласно лемме 3.1, $\gamma_0' = \gamma_0$, следовательно, $\partial\gamma_0' = \varnothing$ и граф G не имеет вершин степени 1. Согласно лемме 3.2, $k + s - 2 \leq n_4$.

Если слой γ_0 является некомпактным, то, как было показано выше, $\partial\gamma_0' \neq \varnothing$, следовательно, $n_1 > 0$. Согласно лемме 3.3 $k + s + \frac{n_1}{2} - 1 \leq n_4$, причем $n_1 \geq 2$.

Поскольку $n_4 = |\Omega_1 \cap \gamma_0|$, $k+s \geq m$, где m — число множеств V_i, приклеивающихся к особому слою γ_0, то теорема 3.1 полностью доказана.

Пусть γ_0 — компактный особый слой. Заметим, что поскольку $\partial W = f_{-\varepsilon} \cup f_{+\varepsilon}$, то поверхности уровня $f_{-\varepsilon}$ и $f_{+\varepsilon}$ гомологичны, то есть

$$\sum[\gamma_{i+}] - \sum[\gamma_{i-}] = 0. \tag{4}$$

Согласно теореме 3.1, если $\gamma_0 \cap \Omega_1 = \varnothing$, то поверхности уровня связны: $f_{+\varepsilon} = \gamma_+$ и $f_{-\varepsilon} = \gamma_-$.

Таким образом, гомологический класс слоя может изменяться только при переходе через особый слой, содержащий точки из Ω_1, то есть если $[\gamma_{i-}] \neq [\gamma_{j+}]$, то $\gamma_0 \cap \Omega_1 \neq \varnothing$. Особые точки из Ω_0 порождают гомологически тривиальные слои.

3.2.2. Вспомогательные леммы

Рассмотрим граф G без петель и кратных ребер. Цепью в графе G называется чередующаяся последовательность $(v_1, r_1, \ldots, r_n, v_{n+1})$ его вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной, такая, что все ребра различны и каждое ребро r_i инцидентно в точности вершинам v_i и v_{i+1} [25]. Циклом называется замкнутая цепь, то есть цепь, в которой $v_1 = v_{n+1}$. Если цепь незамкнута, то есть $v_1 \neq v_{n+1}$, то эти вершины называются концами цепи. Будем называть два ребра графа G смежными относительно данной цепи, если они являются соседними в последовательности, а в случае цикла также если они являются первым и последним ребрами в последовательности. Будем говорить, что два ребра смежны относительно данной цепи в вершине p, если они смежны относительно данной цепи и оба инцидентны вершине p.

Множество S цепей в графе G назовем разбиением графа G (точнее, множества его ребер) на цепи, если каждое ребро графа G принадлежит в точности одной цепи из S; если все цепи разбиения являются циклами, оно называется разбиением на циклы. Будем называть два ребра смежными относительно разбиения S, если они смежны относительно одной из цепей разбиения S.

Степенью вершины графа G называется число ребер, инцидентных данной вершине.

Лемма 3.2. *Пусть G — конечный связный граф, вершины которого имеют степени 2 и 4, S и K — разбиения графа G на s и k циклов соответственно, причем в вершинах степени 4 никакие два ребра графа G не смежны одновременно относительно S и K. Тогда $k + s - 2 \leq n_4$, где n_i - число вершин степени i.*

Доказательство. При $n_4 = 0$ утверждение леммы очевидно. Пусть $n_4 > 0$ и по предположению индукции утверждение леммы выполнено для графов с меньшим числом вершин степени 4.

Рассмотрим вспомогательное построение. Фиксируем вершину p степени 4, обозначим $r_i = \{p, p_i\}$ инцидентные ей ребра, связывающие ее с четырьмя различными вершинами p_i, и пусть дано разбиение R множества $\{r_i\}$ на две пары, скажем, $\{r_1, r_2\}$ и $\{r_3, r_4\}$. Тогда можно следующим образом удалить вершину p из графа G, попарно соединив соответствующие ребра: в множестве вершин графа G заменим вершину p степени 4 на две вершины p' и p'' степени 2, а в множестве ребер заменим ребра $r_i = \{p, p_i\}$ из одной пары на $r_i' = \{p', p_i\}$, а из другой пары — на $r_i'' = \{p'', p_i\}$. Очевидно, полученный граф G' содержит меньше вершин степени 4 и удовлетворяет всем требованиям из условия леммы, кроме, возможно, требования связности. Определен естественный элементарный гомоморфизм [25] H графа G' на G, переводящий r_i' в r_i, а p' и p'' в p.

Пусть теперь даны два различных разбиения множества $\{r_i\}$ на пары, скажем, $R' = \Big\{\{r_1, r_2\}, \{r_3, r_4\}\Big\}$ и $R'' = \Big\{\{r_1, r_3\}, \{r_2, r_4\}\Big\}$. Покажем, что хотя бы одно из них определяет удаление вершины p, оставляющее граф связным. Предположим от противного, что удаления, определяемые разбиениями R' и R'', оба приводят к несвязным графам G' и G'' соответственно. Обозначим связную компоненту вершины p_1 в графе G' через G_1', а в графе G'' через G_1'', и рассмотрим в графе G пересечение G_1 их образов при естественном гомоморфизме H. Покажем, что G_1 не содержит ребер r_i, $i \neq 1$. Действительно, ребра, принадлежащие одной паре, после удаления вершины попадают в одну компоненту связности. Если после удаления вершины p связный граф G становится не-

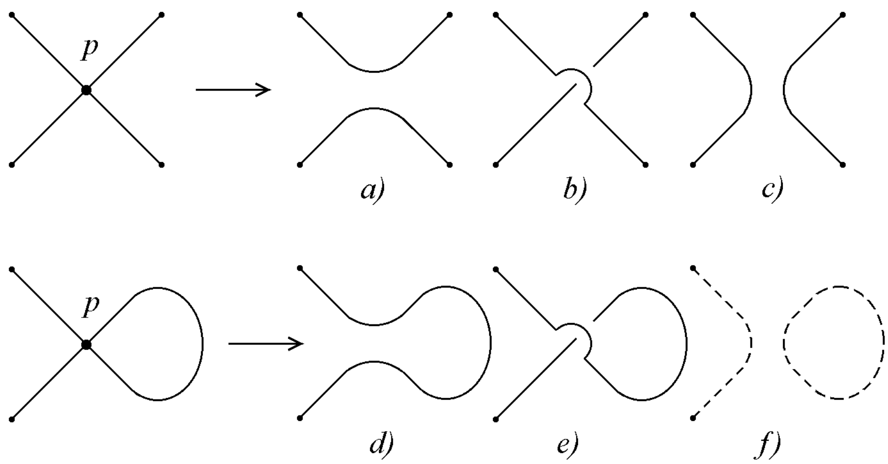


Рис. 1. Удаление вершины (кроме случая f).

связным, то ребра, принадлежащие разным парам, после удаления вершины попадают в разные компоненты связности. Следовательно, $r_3, r_4 \notin G_1'$ и $r_2, r_4 \notin G_1''$.

Таким образом, подграф G_1 содержит ровно одно ребро r_1, инцидентное вершине p, и вместе с каждой вершиной $q \neq p$ содержит все ребра, инцидентные ей в графе G (поскольку то же справедливо для G_1' и G_2'), то есть степени всех вершин в графе G_1, кроме p, равны 2 или 4. Сумма степеней вершин графа G_1 оказывается нечетной, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что хотя бы одно из разбиений R' или R'' определяет удаление вершины p, сохраняющее связность графа.

Продолжим доказательство леммы. Фиксируем вершину p степени 4. Каждое разбиение графа G на циклы индуцирует разбиение множества инцидентных ей ребер на пары соответственно их смежности в циклах. По условию леммы, разбиения S и K в каждой вершине степени 4 индуцируют различные разбиения ребер на пары. Как показано выше, хотя бы одно из них, пусть соответствующее разбиению S, определяет удаление вершины p, приводящее к связному графу G'.

Разбиение S графа G индуцирует разбиение S' графа G' на s' циклов путем переноса свойства смежности ребер относительно разбиения. Аналогично, разбиение K индуцирует разбиение K' графа G' на k' циклов. Поскольку ребра графа G', смежные в добавленных вершинах p' и p'', смежны в графе G именно относительно разбиения S, то как число циклов, так и число ребер в каждом цикле разбиения S' оказывается тем же, что и в S, в частности, $s' = s$. Циклам разбиения K, не проходящим через вершину p, однозначно соответствуют циклы разбиения K'. Непосредственно проверяется, что через вершину p могут проходить один или два цикла разбиения K, и при удалении вершины p они могут соответствовать одному или двум циклам разбиения K', то есть $|k - k'| \leq 1$, в частности, $k \leq k' + 1$. Таким образом, получены неравенства $s = s'$, $k \leq k' + 1$, и по предположению индукции $k' + s' - 2 \leq n - 1$. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Пусть G — конечный связный граф, вершины которого имеют степени 1, 2 и 4; S и K — разбиения графа G на цепи и циклы, содержащие s и k циклов соответственно (незамкнутые цепи не учитываются), причем только вершины степени 1 являются концами цепей, и в вершинах степени 4 никакие два ребра графа G не смежны одновременно относительно K и S.*

Тогда если $n_1 > 0$*, то*

$$k + s + \frac{n_1}{2} - 1 \leq n_4,$$

где n_i *— число вершин степени* i.

Доказательство. Заметим, что, поскольку вершины степени 1 — единственные вершины нечетной степени в графе G, то по следствию 2.1 (a) [25], n_1 четно, в частности, $n_1 \geq 2$. Доказательство проведем индукцией по числу вершин степени 1.

Пусть $n_1 = 2$. Тогда в каждом из разбиений S и K имеется ровно по одной незамкнутой цепи, причем одна из вершин степени 1 является одним концом такой цепи, а другая - другим. Добавим к графу G ребро, соединяющее пару вершин степени 1, обозначив новый граф G'. Добавление этого ребра к каждой из цепей превращает обе цепи в циклы, а разбиения S и K — в разбиения S' и K' графа G' на циклы (без цепей), содержащие $s' = s + 1$ и $k' = k + 1$ циклов соответственно. Граф G' с разбиениями S' и K' удовлетворяет условиям леммы 3.2, следовательно, $k' + s' - 2 \leq n_4$ и утверждение леммы при $n_1 = 2$ выполнено.

Пусть теперь $n_1 > 2$ и по предположению индукции утверждение леммы выполнено для графов с числом вершин степени 1 меньше n_1. Фиксируем вершину p_1 степени 1. Она является концом некоторой цепи C разбиения S; пусть p_2 - вершина, являющаяся вторым концом этой цепи, очевидно, $p_2 \neq p_1$. Снова дополним граф ребром r, соединяющим вершины p_1 и p_2, и обозначим новый граф G'. Добавление ребра r к цепи C превращает ее в цикл, при этом разбиение S индуцирует на графе G' разбиение S', содержащее $s' = s + 1$ циклов.

Каждая из вершин p_1 и p_2 является концом некоторой цепи разбиения K. Если они являются концами одной цепи, присоединение к ней ребра r превращает ее в цикл. Если вершины p_1 и p_2 являются концами различных цепей разбиения K, соединим их через ребро r в одну более длинную цепь. В обоих случаях разбиение K индуцирует на G' разбиение K' с числом циклов $k' \geq k$. Поскольку граф G' с разбиениями S' и K' удовлетворяет условиям леммы и содержит на две вершины степени 1 меньше, то

$$k' + s' + \frac{n_1 - 2}{2} - 1 \leq n_4.$$

Лемма 3.3 доказана.

3.3. Ассоциированный граф множества компактных слоев

Пусть $\operatorname{Sing}\omega \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $U \subset M$, состоящее из всех неособых компактных слоев слоения $\mathcal{F}_\omega$. Согласно лемме 2.1 всякий неособый компактный слой обладает окрестностью, состоящей из диффеоморфных ему слоев, обозначим максимальную такую окрестность $\mathcal{O}(\gamma)$, тогда $U = \bigcup\limits_{\gamma} \mathcal{O}(\gamma)$.

Для различных γ, γ' множества $\mathcal{O}(\gamma)$ и $\mathcal{O}(\gamma')$ либо не пересекаются либо совпадают. Поскольку к особой точке p приклеивается не более четырех цилиндров $\mathcal{O}(\gamma)$, то есть $p \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$, $k \leq 4$, то число различных множеств $\mathcal{O}(\gamma)$ конечно. Следовательно, $U = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathcal{O}(\gamma_i)$.

Рассмотрим замыкание $\overline{U} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, где $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$. Если слоение компактно, то, как было показано в теореме 2.1 $M = \overline{U}$, то есть определено разбиение всего многообразия M на множества V_i. Согласно лемме 2.3 край ∂V_i лежит в объединении особых слоев γ_0.

Сопоставим множеству $\overline{U}$ конечный граф Γ, поставив в соответствие множествам V_i ребра графа, а компонентам связности пересечения $\gamma_0 \cap \overline{U}$ — вершины. Заметим, что согласно лемме 2.5 $\gamma_0 \in \overline{U}$ тогда и только тогда, когда γ_0 — компактный особый слой. Ребро V_i инцидентно вершине $\gamma_0 \cap \overline{U}$, если $\partial V_i \cap \gamma_0 \neq \emptyset$. Граф Γ назовем ассоциированным графом компактных слоев.

Граф Γ имеет два типа вершин:
1). $\gamma_0 \cap \overline{U} = \gamma_0$, то есть особый слой является компактным,
2). $\gamma_0 \cap \overline{U} \neq \gamma_0$, то есть особый слой некомпактен.

Рассмотрим первый случай: особый слой γ_0 является компактным. Если $\gamma_0 \cap \Omega_0 \neq \emptyset$, то соответствующая вершина имеет степень 1. Если $|\gamma_0 \cap \Omega_1| = m > 0$, то, согласно теореме 3.1, вершина имеет степень не больше, чем $m + 2$. Если $\gamma_0 \cap (\Omega_0 \cup \Omega_1) = \emptyset$, то вершина имеет степень 2.

Рассмотрим второй случай: особый слой γ_0 является некомпактным. Согласно теореме 3.1, если $|\gamma_0 \cap \Omega_1| = m > 0$, то вершина имеет степень не больше, чем m.

Если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то граф Γ является связным. В общем случае он может иметь несколько компонент связности.

Введем ориентацию на графе Γ. Поскольку множество $\operatorname{Int} V_i$ не содержит особых точек и в нем $\omega = df_i$, то определено направление роста функции f_i; выберем ориентацию на графе Γ в соответствии с направлениями роста функций f_i. Заметим, что так выбранная ориентация согласована с выбором знаков в выражении (4).

3.4. Особые точки компактных слоений

Теорема 3.2. *Пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, тогда*

$$\operatorname{rk} H_\omega \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|) + 1.$$

Доказательство. Если $\operatorname{Sing}\omega = \emptyset$, то все слои гомологичны, $\operatorname{rk} H_\omega = 1$ и утверждение теоремы выполнено.

Пусть $\operatorname{Sing}\omega \neq \emptyset$, тогда для слоения $\mathcal{F}_\omega$ определен ассоциированный граф Γ. Каждая его вершина определяет линейное уравнение (4) на гомологические классы слоев $\gamma_i \in V_i$, а весь граф Γ определяет систему из P таких уравнений с Q неизвестными, где P — число вершин графа, Q — число ребер. Ранг $\operatorname{rk} H_\omega$ не превосходит ранга пространства решений этой системы. Поскольку слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, граф Γ является связным. Матрицей системы является матрица инцидентности связного графа Γ размерности $P \times Q$. При этом столбцы, соответствующие петлям графа, являются нулевыми, поскольку ребро, являющееся петлей, входит в соответствующую вершину дважды, притом с разными знаками. Ранг матрицы инцидентности по теореме 13.6 [25] равен $P - 1$, следовательно $\operatorname{rk} H_\omega = Q - P + 1$.

Пусть k_i — число вершин степени i, тогда $P = \sum\limits_{i>0} k_i$ и по теореме 2.1 [25] $2Q = \sum\limits_{i>0} ik_i$. С другой стороны, $k_1 = |\Omega_0|$ и по теореме 3.1 $\sum\limits_{i>1}(i-2)k_i \leq |\Omega_1|$. Следовательно, $2\operatorname{rk} H_\omega \leq |\Omega_1| - |\Omega_0| + 2$. Теорема 3.2 доказана.

Поскольку, согласно теореме 2.2, для компактного слоения морсовской формы $\operatorname{dirr}\omega \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$, доказана следующая

Теорема 3.3. *Если слоение морсовской формы ω компактно, то*

$$\operatorname{dirr}\omega \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|)$$

Заметим, что в двумерном случае $|\Omega_1| - |\Omega_0| = 2g - 2$ и полученный результат согласуется с теоремой 1.3.

3.5. Особые точки некомпактных слоений

Из теоремы 3.2 следует, что для компактного слоения $|\Omega_0| \leq |\Omega_1| + 2$. Обобщим этот результат на случай произвольного слоения морсовской формы.

Теорема 3.4. *Пусть ω — морсовская форма. Тогда:*

1) $|\Omega_0| \leq |\Omega_1| + 2$;
2) Если $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, то $\omega = df$, слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно и $\operatorname{rk} H_\omega = 0$.

Доказательство. Если $\Omega_0 = \emptyset$, то утверждение теоремы выполнено. Пусть $\Omega_0 \neq \emptyset$.

Заметим, что первое утверждение теоремы непосредственно следует из второго и теоремы 3.2. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $|\Omega_0| > |\Omega_1| \geq 0$.

Рассмотрим U — множество неособых компактных слоев. Поскольку $\Omega_0 \neq \emptyset$, то $U \neq \emptyset$ и определен ассоциированный граф Γ. Пусть N_i — компоненты связности множества $\overline{U}$, соответственно $\overline{U} = N_1 \cup \ldots \cup N_k$. Поскольку $\Omega_0 \subset \cup N_i$, то для некоторого N_i, скажем для N_1, выполняется неравенство $|\Omega_0 \cap N_1| > |\Omega_1 \cap N_1|$. Пусть Γ_1 — компонента связности графа Γ, соответствующая множеству N_1.

Граф Γ_1 может иметь вершины трех типов:

1) m вершин, соответствующих особым точкам индекса 0, степень такой вершины равна 1.

2) s вершин, соответствующих компактным особым слоям, лежащим в $\overline{U}$, степень такой вершины больше 1. Обозначим s_i — число таких вершин степени i, $s = \sum\limits_{i>1} s_i$. Как было показано в теореме 3.1, число особых точек из Ω_1, соответствующих этим вершинам, не меньше, чем $\sum\limits_{i>1}(i-2)s_i$.

3) t вершин, соответствующих некомпактным особым слоям. Обозначим t_i — число таких вершин степени i, $t = \sum\limits_{i>0} t_i$. В теореме 3.1 показано, что число особых точек из Ω_1, соответствующих этим вершинам, не меньше, чем $\sum\limits_{i>0} it_i$.

Таким образом, неравенство $|\Omega_0 \cap N_1| > |\Omega_1 \cap N_1|$ записывается в виде

$$m > \sum_{i>1}(i-2)s_i + \sum_{i>0} it_i.$$

С другой стороны, из теоремы 2.1 [25] и следствия 4.5 (a) [25] следует, что для связного графа, число вершин степени i которого равно p_i, справедливо неравенство $\sum\limits_{i>1}(i-2)p_i + 2 \geq 0$, что для графа Γ_1 записывается в виде

$$\sum_{i>1}(i-2)s_i + \sum_{i>0}(i-2)t_i - m + 2 \geq 0.$$

Сопоставление этих двух неравенств дает $2t = \sum 2t_i < 2$, то есть t=0. Следовательно, $\partial N_1 = \emptyset$, так как, согласно лемме 2.5, компактные особые слои не могут лежать в крае N_1. Поскольку многообразие M связно, то $M = N_1$ и слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. В силу теоремы 3.3, $\operatorname{dirr}\omega = -1$, то есть $\omega = df$. Согласно теореме 3.2, $\operatorname{rk} H_\omega = 0$. Теорема 3.4 доказана.

В работах Ямато [33, 34] было показано, что если на многообразии M задана морсовская форма ω такая, что $\Omega_0 \neq \emptyset$ и $\Omega_1 = \emptyset$, то форма точна и $\beta_1(M) = 0$. Этот результат согласуется с теоремой 3.4: точность формы следует из пункта (2), и из неравенств Морса получим $|\Omega_1| \geq \beta_1(M)$, следовательно, $\beta_1(M) = 0$.

Итак, если $|\Omega_1| < |\Omega_0|$, то слоение компактно. Рассмотрим случай, когда $|\Omega_0| \leq |\Omega_1| \leq |\Omega_0| + 1$.

Теорема 3.5. *Пусть* $0 \leq |\Omega_1| - |\Omega_0| \leq 1$. *Слоение* $\mathcal{F}_\omega$ *компактно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{dirr} \omega \leq 0$.

Доказательство. Если $\operatorname{dirr} \omega \leq 0$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно согласно [21]. Обратно, пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. Тогда по теореме 3.3, $\operatorname{dirr} \omega \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|)$. Теорема 3.5 доказана.

Литература

[1] Алания Л.А., О топологической структуре поверхностей уровня морсовских 1-форм, УМН. 1991. т.46, N3. с.179-180

[2] Арнольд В.И., Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами, Функ.анализ и его прил. 1991. 25, N2.

[3] Арнольд В.И., Полиинтегрируемые потоки, Алгебра и анализ. 1992. т.4. N 6. с.54-62

[4] Асвад, О линейно независимых 1-формах, Укр.мат.ж. 1990. 42, N7. с.978-983

[5] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии. М., Мир, 1976.

[6] Дынников И.А., Доказательство гипотезы С.П.Новикова для случая малых возмущений рациональных магнитных полей, УМН. 1992. т.47,вып.3(285), с.161-162

[7] Дынников И.А., Доказательство гипотезы С.П.Новикова о полуклассическом движении электрона, Мат. заметки, 1993, т.53, N5, с.57-68

[8] Дынников И.А., О пересечении поверхностей уровня псевдопериодических функций, УМН, 1994, т.49, вып.1(295), с.213-214

[9] Зорич А.В., Задача С.П.Новикова о полуклассическом движении электрона в однородном магнитном поле, близком к рациональному, УМН. 1984. т.39, вып.5(239), с.235-236

[10] Зорич А.В. Квазипериодическая структура поверхностей уровня морсовской 1-формы, близкой к рациональной, — задача С.П.Новикова, Изв. АН СССР. Сер.мат. 1987. т.51, N6. с.1322-1344

[11] Ле Т.К.Т.,Структура поверхностей уровня морсовской формы, Мат.заметки. 1988. т.44, N1. с.124-133

[12] Мельникова И.А., Признак некомпактности слоения на M_g^2, Мат. заметки, 1993. т.53, N3. с.158-160

[13] Мельникова И.А., Признак компактности слоения, Мат. заметки, в печати

[14] Мельникова И.А., Максимальные изотропные подпространства кососимметрического билинейного отображения, Вестник МГУ, в печати

[15] Мельникова И.А., Признак некомпактности слоения морсовской формы, УМН, 1995, т.50, вып.3, с.217-218

[16] Мельникова И.А., Особые точки морсовской формы и слоения, Вестник МГУ, в печати

[17] Новиков С.П., Шмельцер И., Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника – Шнирельмана – Морса (ЛМШ). I, Функ. анализ и его прил., 1981, 15, N3, с.54-66

[18] Новиков С.П., Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II, Функц. анализ и его прил., 1981, 15, N4, с.37-52

[19] Новиков С.П., Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса, ДАН СССР, 1981, 260, N1, с.31-35

[20] Новиков С.П., Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса, УМН, 1982, т.37, вып.5

[21] Новиков С.П., Критические точки и поверхности уровня многозначных функций, Труды МИАН СССР, 1984, т.166, с.201-209

[22] Пажитнов А.В., О точности неравенств типа Новикова для случая $\pi_1 M = \mathbb{Z}_m$ и морсовских форм, классы когомологий которых находятся в общем положении, ДАН СССР, 1989, т.307, N3, с. 544-548

[23] Пажитнов А.В., О точности неравенств типа Новикова для многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой, Мат.сб., 1989, т.180, N11, с.1486-1523

[24] Фарбер М.Ш., Точность неравенств Новикова. Функц.анализ. 1985. т.19, вып.1, с.49-60

[25] Харари Ф., Теория графов, М, Мир, 1973

[26] Цешковский С.И., Об аппроксимации замкнутых 1-форм на многообразии формами Морса, Компл.анал., алгебра и топол./ АН УССР. Ин-т мат. Киев, 1990. с.91-99.

[27] Arnoux P., Levitt G., Sur l'unique ergodicite des 1-formes fermees singulieres, Inv.Math. 84(1986), p.141-156

[28] Henc Damir, Ergodicity of foliations with singularities, J. Funct. Anal., 1987, 75, N2

[29] Imanishi H., On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities, J.Math.Kyoto Univ.(JMKYAZ) 19-2 (1979), p.285-291

[30] Levitt G. 1-formes fermees singulieres et groupe fondamental, Inv.Math. 88 (1987), p. 635-667

[31] Levitt G. Constructing free actions on R-trees, Duke Math.Jour. 69 (1993), p.615-633

[32] Levitt G., Meigniez G., Closed differential one-forms and R-trees, Proc. Geom.Study of foliations, Tokyo, 1994, p.359-373

[33] Yamato K., Qualitive theory of codimension-one foliations, Proc. Jap. Acad., 1972, 48, N6, p.356-359.

[34] Yamato K., Qualitive theory of codimension-one foliations, Nagoya Math. J., 1973, 49, p.155-229.