4. Ц а р е в С. П. Дифференциально-геометрические методы интегрирования систем гидродинамического типа: Докт. дис. М., 1993.
5. F e r a p o n t o v E. V. On the integrability of 3×3 semihamiltonian hydrodynamic type systems which do not possess Riemann invariants//Physica D. 1993. **63**. 50—70.
6. T s a r e v S. P. Classical differential geometry and integrability of systems of hydrodynamic type//Proc. NATO ARW „Applications of analytic and geometric methods to nonlinear differential equations". 14—19 July 1992. Exeter.
7. Е г о р о в Д. Ф. Работы по дифференциальной геометрии. М., 1970.

Поступила в редакцию
07.06.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 515.164

И. А. Мельникова

ОСОБЫЕ ТОЧКИ МОРСОВСКОЙ ФОРМЫ И СЛОЕНИЯ

В статье изучаются особые точки морсовской формы ω и их связь со слоением $\mathcal{F}_\omega$, определяемым этой формой.

В п. 1 приводятся необходимые определения. В п. 2 показывается, что число гомологически независимых слоев компактного слоения $\mathcal{F}_\omega$ и степень иррациональности формы ω определяются соотношением чисел особых точек индекса 0 и 1. В п. 3 для произвольной морсовской формы приводится соотношение между числами особых точек индекса 0 и 1, а также связанные с ним признаки компактности слоения.

1. Основные определения. Рассмотрим гладкое компактное связное ориентируемое n-мерное многообразие M и определенную на нем замкнутую 1-форму ω с морсовскими особенностями; такую форму мы называем морсовской. Обозначим множество ее особых точек через $\mathrm{Sing}\,\omega$. Замкнутая форма ω определяет на множестве $M\setminus\mathrm{Sing}\,\omega$ слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1.

Определим на многообразии M слоение с особенностями $\mathcal{F}_\omega$ следующим образом.

Пусть в окрестности особой точки $p\in\mathrm{Sing}\,\omega$ слоение $\mathcal{F}$ локально определяется уровнями функции f_p, причем $f_p(p)=0$. Очевидно, что

$f_p^{-1}(0)\setminus p\subset\bigcup\gamma_i$, где $\gamma_i\in\mathcal{F}$.

Слой $\gamma\in\mathcal{F}$ называется неособым слоем $\mathcal{F}_\omega$, если $\forall p\in\mathrm{Sing}\,\omega\ \gamma\cap f_p^{-1}(0)=\varnothing$.

Обозначим $F_p=p\cup\{\gamma\in\mathcal{F}\mid\gamma\cap f_p^{-1}(0)\neq\varnothing\}$. Пусть $F=\bigcup\limits_{p\in\mathrm{Sing}\,\omega}F_p$. Особым слоем γ_0 слоения $\mathcal{F}_\omega$ называется максимальная связная компонента множества F.

Слоение называется компактным, если все его слои компактны.

Сопоставим каждому неособому компактному слою $\gamma\in\mathcal{F}_\omega$ его гомологический класс $[\gamma]$. Образ множества неособых компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_{n-1}(M)$. Обозначим ее H_ω.

Пусть p — особая точка морсовской формы ω и $x^1,\dots,x^n$ — координаты в окрестности p, такие, что

$$\omega=\sum_{i=1}^{\lambda}x^i dx^i-\sum_{i=\lambda+1}^{n}x^i dx^i.$$

Индексом $\operatorname{ind} p$ особой точки p называется число $\min(\lambda, n-\lambda)$ [1]. Обозначим через Ω_i множество особых точек индекса i.

Степенью иррациональности формы ω называется число

$$\operatorname{dirr} \omega = rk_{\mathbf{Q}} \left\{ \int\limits_{z_1} \omega, \ \ldots \ , \int\limits_{z_m} \omega \right\} - 1,$$

где $z_1, \ldots, z_m$ — базис в $H_1(M)$ [2].

2. Особые точки компактного слоения. Рассмотрим особую точку $p \in M$. В некоторой окрестности точки p форма ω точна, и, следовательно, слоение $\mathcal{F}_\omega$ в этой окрестности определяется поверхностями уровня некоторой функции f, $f(p)=0$. Если $\operatorname{ind} p \neq 1$, то все поверхности уровня функции f локально линейно связны. Если $\operatorname{ind} p = 1$, то для малого $\varepsilon > 0$ локально в окрестности точки p поверхность уровня f_ε (или $f_{-\varepsilon}$) функции f является двуполостным гиперболоидом и имеет локально две компоненты связности.

Пусть $\gamma_0 \in \mathcal{F}_\omega$ — компактный особый слой. Функция f, уровнями которой локально задается слоение, может быть определена в окрестности всего слоя γ_0, причем для достаточно малого ε множество $W = f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ не содержит других особых слоев. Нетрудно показать, что если $f_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \gamma_{i+}$ и $f_{-\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \gamma_{i-}$, то особый слой содержит не менее $k+s-2$ особых точек из Ω_1. В частности, если $\gamma_0 \cap \Omega_1 = \varnothing$, то поверхности уровня связны: $f_\varepsilon = \gamma_+$ и $f_{-\varepsilon} = \gamma_-$.

Заметим, что поскольку $\partial W = f_{-\varepsilon} \cup f_\varepsilon$, поверхности уровня $f_{-\varepsilon}$ и f_ε гомологичны:

$$\Sigma [\gamma_{i+}] - \Sigma [\gamma_{i-}] = 0. \tag{1}$$

Таким образом, гомологический класс слоя может изменяться только при переходе через особый слой, содержащий точки из Ω_1, т. е. если $[\gamma_{i-}] \neq [\gamma_{j+}]$, то $\gamma_0 \cap \Omega_1 \neq \varnothing$. Особая точка из Ω_0 порождает гомологически тривиальный слой.

Пусть $\operatorname{Sing} \omega \neq \varnothing$. Рассмотрим U — множество всех неособых компактных слоев, оно представляется в виде $U = \bigcup \mathcal{O}(\gamma)$, где $\mathcal{O}(\gamma)$ — максимальная цилиндрическая окрестность неособого компактного слоя γ, состоящая из диффеоморфных ему слоев. Число цилиндров $\mathcal{O}(\gamma)$ конечно, поскольку каждая особая точка лежит в крае не более чем четырех цилиндров. Следовательно, $\bar{U} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$, где $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$. Если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то, как показано в работе [3], определено разбиение всего многообразия M на множества V_i. Край ∂V_i лежит в объединении особых слоев γ_0.

Сопоставим множеству $\bar{U}$ конечный граф Γ, при этом множествам V_i будут соответствовать ребра графа, а компонентам связности пересечения $\gamma_0 \cap \bar{U}$ — вершины, где γ_0 — особый слой. Ребро V_i инцидентно вершине $\gamma_0 \cap \bar{U}$, если $\partial V_i \cap \gamma_0 \neq \varnothing$. Граф Γ назовем ассоциированным графом множества компактных слоев.

Граф Γ имеет два типа вершин:

1) $\gamma_0 \cap \bar{U} = \gamma_0$, т. е. особый слой является компактным. Если $\gamma_0 \cap \Omega_0 \neq \varnothing$, то соответствующая вершина имеет степень 1. Если $|\gamma_0 \cap \Omega_1| = m > 0$, то вершина имеет степень не больше, чем $m+2$. Если $\gamma_0 \cap (\Omega_0 \cup \Omega_1) = \varnothing$, то вершина имеет степень 2;

2) $\gamma_0 \cap \bar{U} \neq \gamma_0$, т. е. особый слой некомпактен. Нетрудно показать, что если $|\gamma_0 \cap \Omega_1| = m > 0$, то вершина имеет степень не больше, чем m.

Если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то граф Г является связным. В общем случае он может иметь несколько компонент связности.

Введем ориентацию на графе Г. Поскольку множество $\operatorname{Int} V_i$ не содержит особых точек и в нем $\omega = df_i$, то определено направление роста функции f_i; выберем ориентацию на графе Г в соответствии с направлениями роста функций f_i. Заметим, что так выбранная ориентация согласована с выбором знаков в выражении (1).

Теорема 1. *Пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, тогда*

$$\operatorname{rk} H_\omega \leqslant \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|) + 1.$$

Доказательство. Если $\operatorname{Sing}\omega = \varnothing$, то все слои гомологичны, $\operatorname{rk} H_\omega = 1$ и утверждение теоремы выполнено.

Пусть $\operatorname{Sing}\omega \neq \varnothing$, тогда для слоения $\mathcal{F}_\omega$ определен ассоциированный граф Г. Поскольку слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, граф Г является связным. Каждая его вершина определяет линейное уравнение (1), связывающее гомологические классы слоев $\gamma_i \in V_i$, а весь граф Г определяет систему из P таких уравнений с Q неизвестными, где P — число вершин графа, Q — число ребер. Ранг $\operatorname{rk} H_\omega$ равен рангу пространства решений этой системы. Матрицей системы является матрица инцидентности связного графа Г размерности $P \times Q$, ранг которой по теореме 13.6 [4] равен $P-1$, следовательно, $\operatorname{rk} H_\omega = Q - P + 1$.

Пусть k_i — число вершин степени i, тогда $P = \sum_{i>0} k_i$ и по теореме 2.1 [4] $2Q = \sum_{i>0} ik_i$. С другой стороны, $k_1 = |\Omega_0|$ и $\sum_{i>1} (i-2)k_i \leqslant |\Omega_1|$. Теорема 1 доказана.

Согласно [3] для компактного слоения морсовской формы $\operatorname{dirr}\omega \leqslant \operatorname{rk} H_\omega - 1$, таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Если слоение морсовской формы ω компактно, то*

$$\operatorname{dirr}\omega \leqslant \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|).$$

3. Некомпактные слоения. Из теоремы 1 следует, что для компактного слоения $|\Omega_0| \leqslant |\Omega_1| + 2$. Обобщим этот результат на случай произвольного слоения морсовской формы.

Теорема 3. *Пусть ω — морсовская форма. Тогда*

1) $|\Omega_0| \leqslant |\Omega_1| + 2$;

2) *если* $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, *то* $\omega = df$, *слоение* $\mathcal{F}_\omega$ *компактно и* $\operatorname{rk} H_\omega = 0$.

Доказательство. В случае $\Omega_0 = \varnothing$ утверждение теоремы очевидно выполнено.

Пусть $\Omega_0 \neq \varnothing$. Заметим, что первое утверждение теоремы непосредственно следует из второго и теоремы 1. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $|\Omega_0| > |\Omega_1| \geqslant 0$.

Рассмотрим U — множество неособых компактных слоев. Так как $\Omega_0 \neq \varnothing$, то $U \neq \varnothing$ и определен ассоциированный граф Г. Пусть N_i — компоненты связности множества $\bar{U}$, соответственно $\bar{U} = N_1 \cup \ldots \cup N_k$. Поскольку $\Omega_0 \subset \cup N_i$, то для некоторого N_i, скажем для N_1, выполняется неравенство $|\Omega_0 \cap N_1| > |\Omega_1 \cap N_1|$. Пусть Γ_1 — компонента связности графа Г, соответствующая множеству N_1.

Граф Γ_1 может иметь:

1) m вершин, соответствующих особым точкам индекса 0, степень такой вершины равна 1;

2) s вершин, соответствующих компактным особым слоям, лежащим в $\bar{U}$, степень такой вершины больше 1. Обозначим через s_i число таких вершин степени i, $s=\sum_{i>1} s_i$. Как было показано в п. 2, число особых точек из Ω_1, соответствующих этим вершинам, не меньше, чем $\sum_{i>1} (i-2)\,s_i$.

3) t вершин, соответствующих некомпактным особым слоям. Обозначим через t_i число таких вершин степени i, $t=\sum_{i>0} t_i$. Как было показано в п. 2, число особых точек из Ω_1, соответствующих этим вершинам, не меньше, чем $\sum_{i>0} it_i$.

Таким образом, неравенство $|\Omega_0\cap N_1|>|\Omega_1\cap N_1|$ перепишется следующим образом:

$$m>\sum_{i>1}(i-2)\,s_i+\sum_{i>0} it_i.$$

С другой стороны, согласно теореме 2.1 [4] и следствию 4.5 (а) [4] для связного графа, число вершин степени i которого равно p_i, справедливо неравенство $\sum_{i>1}(i-2)\,p_i+2\geqslant 0$, что для графа Γ_1 записывается в виде

$$\sum_{i>1}(i-2)\,s_i+\sum_{i>0}(i-2)\,t_i-m+2\geqslant 0.$$

Сопоставление этих двух неравенств дает $2t=\Sigma 2t_i<2$, т. е. $t=0$. Следовательно, $\partial N_1=\varnothing$, так как компактные особые слои не могут лежать в крае N_1. Поскольку многообразие M связно, то $M=N_1$ и слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. В силу теоремы 2 имеем $\operatorname{dirr}\omega=-1$, т. е. $\omega=df$. Согласно теореме 1 получаем $\operatorname{rk} H_\omega=0$. Теорема 3 доказана.

Итак, если $|\Omega_1|<|\Omega_0|$, то слоение компактно. Рассмотрим случай, когда $|\Omega_0|\leqslant|\Omega_1|\leqslant|\Omega_0|+1$.

Теорема 4. *Пусть* $0\leqslant|\Omega_1|-|\Omega_0|\leqslant 1$. *Слоение* $\mathcal{F}_\omega$ *компактно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{dirr}\omega\leqslant 0$.

Доказательство. Если $\operatorname{dirr}\omega\leqslant 0$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно согласно [2]. Обратно, пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. Тогда по теореме 2 имеем $\operatorname{dirr}\omega\leqslant\frac{1}{2}(|\Omega_1|-|\Omega_0|)$. Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность профессору А. С. Мищенко за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда и правительства Российской Федерации, грант N MGM300.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Henč D. Ergodicity of foliations with singularities//J. Funct. Anal. 1987. **75**, N 2. 72—84.
2. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса// //Успехи матем. наук. 1982. **37**, вып. 5. 3—49.
3. Мельникова И. А. Признак некомпактности слоения морсовской формы//Успехи матем. наук. 1995. **50**, вып. 3. 217—218.
4. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.

Поступила в редакцию
09.06.95