Математика

УДК 515.164

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА КОСОСИММЕТРИЧЕСКОГО БИЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

И. А. Мельникова

В работах [1, 2] рассматривалась проблема компактности слоения морсовской формы на замкнутом многообразии M^n. В [1] доказан следующий признак: если подгруппа в $H_{n-1}(M)$, порожденная неособыми компактными слоями, является максимальной изотропной подгруппой относительно операции пересечения гомологических классов, то слоение компактно. В [2] показано, что если степень иррациональности морсовской формы больше, чем ранг максимальной изотропной подгруппы в $H_{n-1}(M)$, то слоение имеет некомпактный слой. В связи с этим возникает задача вычисления ранга максимальной изотропной подгруппы, которой и посвящена настоящая статья.

Сначала рассмотрим более общую задачу о максимальных изотропных подпространствах произвольного билинейного отображения. Пусть L, V — конечномерные линейные пространства, $\varphi : L \times L \to V$ — билинейное кососимметрическое отображение.

Определение 1. Подпространство $L_0 \subseteq L$ называется изотропным относительно отображения φ, если для произвольных $l, l' \in L_0$ выполняется равенство $\varphi(l, l') = 0$. Изотропное подпространство L_0 называется максимальным, если для любого $l \notin L_0$ найдется вектор $l_0 \in L_0$, такой, что $\varphi(l, l_0) \neq 0$.

Всякое одномерное подпространство является изотропным, его можно дополнить до максимального, вообще говоря, неоднозначным образом. Максимальные изотропные подпространства могут иметь несовпадающие размерности, например, отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(a, b) = [[a, b], l]$, где l — фиксированный вектор ($[\ ,\ ]$ — векторное произведение), имеет максимальные изотропные подпространства $L_1 = < l >$, $\dim L_1 = 1$, и $L_2 = l^{\perp}$, $\dim L_2 = 2$.

Оценим сверху и снизу размерность максимального изотропного подпространства L_0.

Если $L \neq \{0\}$, то $\dim L_0 \geqslant 1$, поскольку всякое одномерное подпространство является изотропным. Следующее предложение дает более точную нижнюю оценку.

Предложение 1. *Пусть L, V — конечномерные линейные пространства, $\varphi : L \times L \to V$ — кососимметричное билинейное отображение и $L_0 \subseteq L$ — максимальное изотропное подпространство. Тогда*

$$\dim L_0 \geqslant \frac{\dim L}{\dim V + 1}.$$

Доказательство. Обозначим: $v = \dim V$, $l = \dim L$, $m = \dim L_0$. Выберем в L_0 базис $e_1, \ldots, e_m$ и дополним его до базиса пространства L векторами $g_1, \ldots, g_{l-m}$. Пусть, от противного, $l - m > vm$, тогда система vm уравнений

$$\sum_{k=1}^{l-m} x^k \varphi(e_i, g_k) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

имеет нетривиальное решение, причем $\varphi(e_i, \sum x^j g_j) = 0$ для всех i, что противоречит максимальности L_0. Предложение 1 доказано.

Замечание. Имеет место более сильная оценка:

$$\dim L_0 \geqslant \dim \ker \varphi + \frac{\dim L - \dim \ker \varphi}{\dim V + 1},$$

где $\ker \varphi = \{l \in L \mid \varphi(l, l') = 0 \ \forall l' \in L\}$; обозначим $K = \ker \varphi$. Для доказательства применим предложение 1 к отображению факторпространств $L/K \times L/K \to V$ (оно корректно определено) и заметим, что $\dim L/K = \dim L - \dim K$, а $\dim L_0/K = \dim L_0 - \dim K$, поскольку K содержится в любом максимальном изотропном подпространстве.

Оценим размерность максимального изотропного подпространства L_0 сверху.

Предложение 2. *Пусть L, V — конечномерные линейные пространства, $\varphi : L \times L \to V$ — кососимметричное билинейное отображение и $L_0 \subseteq L$ — максимальное изотропное подпространство. Тогда*

$$\dim L_0 \leqslant \frac{\dim L \dim V + \dim \ker \varphi}{\dim V + 1}.$$

Доказательство. Вложение $L_0 \to L$ индуцирует точную последовательность $0 \to L_0 \to L$. Применив к ней функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, V)$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(L, V) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}(L_0, V) \to 0.$$

Пусть $L_0^\perp = \{\alpha : L \to V \mid \alpha|_{L_0} = 0\}$. Очевидно, $L_0^\perp = \mathrm{Ker}\,\psi$, тогда

$$\dim L_0^\perp = \dim L \dim V - \dim L_0 \dim V. \tag{1}$$

Гомоморфизм $\bar\varphi : L \to \mathrm{Hom}(L, V)$ определяется билинейным отображением φ по формуле $\bar\varphi(l) = \varphi(l, \cdot)$. Рассмотрим ограничение этого гомоморфизма на подпространство $L_0 : \bar\varphi_0 = \bar\varphi\,|_{L_0}$. Очевидно, что $\bar\varphi_0 : L_0 \to L_0^\perp$. При этом

$$\dim L_0 = \dim \ker \bar\varphi_0 + \dim \mathrm{Im}\,\bar\varphi_0 \leqslant \dim \ker \bar\varphi + \dim L_0^\perp.$$

По определению $\ker \bar\varphi = \ker \varphi$ и $\dim L_0 \leqslant \dim \ker \bar\varphi + \dim L_0^\perp$. Сопоставляя с (1), получим требуемое неравенство. Предложение 2 доказано.

Предложения 1 и 2 определяют интервал, в котором лежит значение $\dim L_0$; однако не всякому целому числу, лежащему в этом интервале, соответствует максимальное изотропное подпространство $L_0 \subseteq L$. Доказанные оценки являются точными в следующем смысле: существуют такие пространства L, V и отображение φ, что некоторое максимальное изотропное подпространство $L_0 \subseteq L$ имеет минимальную (или максимальную) возможную размерность.

Верхняя и нижняя оценки совпадают тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: 1) $\dim V = 1$; 2) $\varphi \equiv 0$. В этом случае $\dim L_0$ определяется однозначно, $\dim L_0 = \frac{1}{2}(\dim L + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi)$.

Если отображение φ сюръективно, можно получить еще одну оценку на $\dim L_0$, которая при достаточно высокой размерности пространства V является более эффективной, чем верхняя оценка, установленная в предложении 2.

Предложение 3. *Пусть L, V — конечномерные линейные пространства, $\varphi : L \times L \to V$ — сюръективное кососимметричное билинейное отображение и $L_0 \subseteq L$ — максимальное изотропное подпространство. Тогда*

$$(\dim L - \dim L_0)(\dim L + \dim L_0 - 1) \geqslant 2 \dim V.$$

Доказательство. Обозначим: $l = \dim L$, $m = \dim L_0$, $v = \dim V$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_m$ в L_0 и дополним его до базиса пространства L векторами $e_{m+1}, \ldots, e_l$. Матрица отображения $\varphi(e_i, e_j)$ имеет вид

$$\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
0 & & \text{A} & \\
\hline
 & 0 & & \text{B} \\
\text{-A} & & 0 & \\
 & \text{-B} & & 0 \\
\hline
\end{array},$$

где прямоугольная область A содержит $m \cdot (l - m)$ элементов, а треугольная область B содержит $\frac{1}{2}(l - m) \cdot (l - m - 1)$ элементов. Таким образом, $\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leqslant m \cdot (l - m) + \frac{1}{2}(l - m) \cdot (l - m - 1) = \frac{1}{2}(l - m) \cdot (l + m - 1)$. Но по условию $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = v$. Предложение 3 доказано.

Рассмотрим теперь пространство $H_{n-1}(M, \mathbb{Q})$ и отображение пересечения $\varphi : H_{n-1}(M, \mathbb{Q}) \times H_{n-1}(M, \mathbb{Q}) \to H_{n-2}(M, \mathbb{Q})$. Обозначим через $\beta_k = \beta_k(M)$ числа Бетти многообразия M. Тогда $\dim H_{n-1}(M, \mathbb{Q}) = \beta_1$, $\dim H_{n-2}(M, \mathbb{Q}) = \beta_2$. Размерность максимального изотропного подпространства $L_0 \subseteq H_{n-1}(M, \mathbb{Q})$ обозначим $h_0(M)$. В силу предложений 1 и 2 имеем

$$\dim\ker\varphi + \frac{\beta_1 - \dim\ker\varphi}{\beta_2 + 1} \leqslant h_0(M) \leqslant \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 + \dim\ker\varphi}{\beta_2 + 1}.$$

Если отображение φ сюръективно, то согласно предложению 3 справедливо неравенство

$$(\beta_1 - h_0(M))(\beta_1 + h_0(M) - 1) \geqslant 2\beta_2.$$

Рассмотрим примеры вычисления $h_0(M)$ для некоторых многообразий.

Пример 1. Пусть $M = T^n$ — n-мерный тор. Отображение пересечения гомологических классов является сюръективным, $\beta_1(T^n) = n$, $\beta_2(T^n) = C_n^2$. Согласно предложению 3 имеем

$$(n - h_0) \cdot (n + h_0 - 1) \geqslant 2C_n^2.$$

Тогда $n \cdot (n-1) + h_0 - h_0^2 \geqslant 2C_n^2$, следовательно, $h_0^2 - h_0 \leqslant 0$, т.е. $h_0(T^n) \leqslant 1$. С другой стороны, поскольку $\beta_1(T^n) \neq 0$, то $h_0(T^n) \geqslant 1$. Таким образом, $h_0(T^n) = 1$.

Пример 2. Пусть $M = M_g^2$. Отображение пересечения циклов $\varphi : H_1(M, \mathbb{R}) \times H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ невырождено: $\ker\varphi = 0$, $\beta_1(M_g^2) = 2g$, $\beta_2(M_g^2) = 1$. Согласно предложению 1 $h_0(M_g^2) \geqslant g$. С другой стороны, из предложения 2 имеем $h_0(M_g^2) \leqslant g$. Следовательно, $h_0(M_g^2) = g$.

Автор выражает благодарность профессору А. С. Мищенко за внимание к работе и полезные обсуждения.

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ, грант № 96-01-00276.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мельникова И.А.* Признак компактности слоения //Матем. заметки. 1995. **58**, вып. 6. 872–877.
2. *Мельникова И.А.* Признак некомпактности слоения морсовской формы //Успехи матем. наук. 1995. **50**, вып. 3. 217–218.

Поступила в редакцию
21.10.94
После доработки
29.04.98

УДК 517.927.25

ОБ ОЦЕНКАХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В $\mathcal{L}^p$

И. С. Ломов

В работе исследуются свойства биортогональных разложений, связанных с линейными несамосопряженными дифференциальными операторами, порожденными дифференциальным выражением второго порядка с ненулевым коэффициентом при первой производной. При минимальных требованиях на разлагаемую функцию и коэффициенты оператора получены оценки в метрике пространств $\mathcal{L}^p$, $p \geqslant 2$, частичных сумм биортогональных рядов, разности этих сумм с разлагаемой функцией и с разложением этой функции в тригонометрический ряд Фурье. Получены достаточные условия равносходимости указанных разложений. Допускается случай существенно несамосопряженного оператора (система корневых функций может содержать бесконечное число присоединенных функций). На системы, биортогонально сопряженные с системами корневых функций оператора, налагаются минимальные требования.

1. Постановка задачи. Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L_1, порожденный дифференциальной операцией

$$L_1 u = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u, \quad x \in G = (0, 1), \tag{1}$$

на классе D функций, абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной;

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathbb{C}), \quad s \geqslant 1; \qquad p_2(x) \in \mathcal{L}(G, \mathbb{C}). \tag{2}$$